

Topologia Geral de Vários Ângulos

André Caldas de Souza
and YOU! :-)

3 de dezembro de 2010

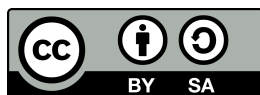
Este Livro é Livre

Este livro pode ser copiado à vontade. Se você recebeu em formato digital, fique à vontade para copiá-lo e comparilhá-lo quantas vezes quiser. Você pode também imprimí-lo e fotocopiá-lo o tanto que quiser. Claro que é sempre importante pensar na natureza e no impacto ambiental. Procure não desperdiçar recursos. ;-)

Quer imprimir e vender este livro para os seus colegas? Fique à vontade, também! Você é dono de uma editora e quer imprimir sua própria versão, vender e ficar rico com esse livro sem precisar pagar nenhum tostão em direitos autorais? Pois na minha opinião, se você o fizer estará contribuindo para um mundo melhor. Uma das poucas restrições é que você não tire dos outros essa liberdade que lhe foi concedida. Se você passar esse livro pra frente, não poderá proibir aquele que o recebeu de fazer o mesmo.

Este livro está licenciado sob os termos da licença “Creative Commons Attribution Share Alike 3.0”. Os termos estão disponíveis na internet através do endereço

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.



A versão mais atual deste livro pode ser encontrada na internet no endereço

<http://topologia-geral.ourproject.org/>.

Neste endereço também podem ser encontrados os arquivos $\text{\LaTeX}$, que você pode alterar e usar para criar sua própria versão deste livro.

Sobre o OurProject.org

O site onde está hospedado o projeto deste livro é um repositório de conteúdos livre. Qualquer um que queira produzir conteúdos livres — como

livros, poesias, músicas, vídeos e etc. — pode utilizá-lo como ferramenta. Ah... o site sobrevive com doações. ;-)

Endereço: <http://ourproject.org/>

Faz algum tempo que eu procurava um lugar que pudesse hospedar o projeto de um livro livre. Já estava pensando em tentar fazer alguma coisa nesse estilo dentro do próprio departamento de matemática da UnB. Felizmente encontrei o OurProject e isso não será mais necessário.

Como Ajudar?

A melhor maneira de ajudar, é repassando este livro para o maior número de pessoas! Quanto mais pessoas tiverem interesse no livro, maiores serão as chances de se atingir um bom nível de qualidade. Sugestões, correções ou contribuições podem ser enviadas para o e-mail topologia-geral-discussion@lists.ourproject.org. Ainda não sei quão aberto a sugestões estou disposto a ser. No entanto, você é livre para, respeitando os termos da licença, criar sua própria versão e incluir seu próprio conteúdo. Os arquivos que compõem o projeto deste livro podem ser baixados do repositório SVN no endereço

https://ourproject.org/scm/?group_id=914.

Contribuindo com Figuras

Me falta um certo dom para criar figuras de qualidade. :-(

Se você puder contribuir com imagens, estas devem estar preferencialmente no formato SVG. O SVG foi adotado por ser um *padrão aberto* baseado em XML. O aplicativo que eu uso para criar figuras é *software livre* e chama-se *Inkscape*. A página do projeto *Inkscape* é <http://www.inkscape.org/>.

Contribuindo com Código L^AT_EX

Os arquivos L^AT_EX devem seguir o mesmo tipo de formatação dos demais. Na medida do possível, o arquivo L^AT_EX não deve conter “gambiarras” ou comandos de formatação explícitos no meio do texto.

Os arquivos do projeto contém várias linhas com comentários explicando o que falta ser feito. Basta procurar pela palavra TODO (a fazer).

Por Quê?

Eu (André Caldas) NÃO acredito que “coletar taxas” seja a melhor maneira de se sobreviver da produção cultural. Na minha opinião, as pessoas devem receber para produzir; e não produzir na esperança de “coletar taxas” relativas ao direito autoral para o resto da vida. Eu, por exemplo, atualmente sou estudante de doutorado da UnB e recebo uma bolsa de estudo da CAPES. Apesar de a bolsa não cobrir os custos para a produção deste livro, foi esta mesma bolsa que viabilizou que eu pudesse deixar o meu emprego para me dedicar às minhas atividades acadêmicas. Ou seja, a sociedade já me oferece meios para que eu possa me dedicar a estas atividades, o que incluí a produção deste livro. :-)

Não vejo sentido em um professor de uma universidade pública, que já recebe um salário do governo para que produza conhecimento, ter monopólios sobre o fruto do seu trabalho. Vejo menos sentido ainda quando esse professor vende tal monopólio para ser explorado. Perceba que isso não é uma crítica ao lucro ou à exploração da produção científica. É uma crítica ao monopólio sobre os direitos de uso daquilo que foi produzido com dinheiro público. Não faz sentido que a sociedade faça esse tipo de investimento e depois não possa ter acesso ao que foi produzido. Livros é o menor dos problemas. Vemos que pesquisas para o desenvolvimento de medicamentos ou qualquer outra coisa que vá melhorar a qualidade de vida da população, como melhoria na alimentação e acesso ao lazer, são feitas com dinheiro público em parceria com instituições privadas de modo que a sociedade acaba sendo privada de seus frutos. Não acredito que seja errado fazer parceria com instituições privadas. O que não se pode é privar a sociedade dos frutos do trabalho no qual investiu. Vemos instituições de pesquisa se valerem de recursos públicos durante as pesquisas e depois correrem atrás de registros de patentes e coisas do tipo que servem apenas ao propósito de privar a sociedade dos frutos dessa mesma pesquisa.

Se o governo, por exemplo, a uns 10 anos atrás tivesse começado a financiar a produção de livros e exigisse que o fruto desse trabalho fosse verdadeiramente livre (como é este livro), hoje não faríamos licitações para a “compra” de livros; faríamos uma licitação para a impressão e a distribuição desses livros. Falta visão de longo prazo. Deveríamos investir na produção de livros livres. O autor deve sim receber por seu trabalho. Só que deve receber enquanto faz o trabalho, e não depois através do recolhimento de taxas e de mecanismos de opressão, como os que apreendem máquinas de fotocópia nas universidades.

Tenho vários amigos que fazem cópias de muitos livros. Sempre lembro a eles que quando virarem autores não devem “virar a casaca” e começar a

perseguir os que fazem cópias. Gostaria de fazer o mesmo pedido ao leitor!
:-)

Brasília, 23 de abril de 2010,
André Caldas

Sumário

Este Livro é Livre	i
Sumário	v
Prefácio	vii
I Espaços Métricos	1
1 Definição e Propriedades	2
1.1 Definição	2
1.2 Propriedades Elementares	4
1.3 Exemplos	7
2 Topologia Usando uma Métrica	10
2.1 Seqüências e Convergência	10
2.2 Continuidade	12
2.3 Topologia com Bolas	13
3 Topologia de Espaços Métricos: releitura	16
3.1 Vizinhanças	16
3.2 Continuidade em um Ponto	19
3.3 Base de Vizinhanças	20
3.4 Conjuntos Abertos	22
3.5 Continuidade em Todo Ponto	24
II Topologia Geral	26
4 Motivação e Definições	27
4.1 Motivação	27
4.2 Definição	30

4.3	Vizinhanças e Base de Vizinhanças de um Ponto	31
4.4	Continuidade em um Ponto	33
4.5	Continuidade	34
5	Construindo Topologias	37
5.1	Comparando Topologias	37
5.2	Sub-Base	40
5.3	Bases	44
6	Fecho e Interior	48
6.1	Fecho e Fechado	48
6.2	Interior	52
6.3	Continuidade	54
6.4	Convergência	55
7	Topologias Derivadas de Outras Topologias	59
7.1	Topologia de um Sub-Espaço	59
7.2	Topologias Inicial e Final	63
7.3	Topologia Produto	66
7.4	Topologia Quociente	71
7.5	Topologias das Sequências Convergentes	75

Prefácio

Os livros que tratam do assunto *topologia* parecem se dividir em duas categorias:

- Começam com definições abstratas e pouco motivadas.
- Tratam *apenas* de espaços métricos.

Os espaços métricos são sem dúvida a melhor motivação para o estudo da *topologia geral*. No entanto, existem muitos conceitos, como os de *sequência de Cauchy*, *completude*, *limitação* e *continuidade uniforme*, que não são conceitos topológicos. O que acontece é que os textos que tratam de topologia dos espaços métricos dão muita ênfase a esses conceitos, à *equivalência de métricas*, ao *completamento de espaços*, e por aí vai. O fato é que dessa forma não se tem um curso de *topologia*, tem-se um curso de *espaços métricos*.

Por outro lado, sem falar de espaços métricos é muito difícil dar alguma motivação para o que venha a ser uma *topologia*. Assim, neste livro, fizemos uma introdução rápida aos espaços métricos sem nenhuma menção a questões que não sejam puramente topológicas. Falamos de bolas, de convergência e de continuidade. A idéia é a de se fazer uma transição entre as formulações que enfatizam mais a métrica até chegar a formulações que dependam apenas da topologia do espaço.

Um outro diferencial deste livro está na busca por maneiras alternativas de se olhar para os fenômenos topológicos. Em geral os conjuntos abertos recebem atenção demasiada. Por exemplo, quando estudamos análise funcional, estamos bastante interessados na continuidade de operadores lineares em topologias que são invariantes por translações. Neste caso a continuidade se resume à continuidade na origem. Quando consideramos a continuidade em um único ponto do espaço, a preocupação em demonstrar que determinados conjuntos são *abertos* é um exagero desnecessário. Deveríamos nos preocupar se estes conjuntos são ou não *vizinhanças* de 0. A intenção é que o leitor consiga identificar maneiras alternativas que melhor

se adaptem ao fenômeno que está sendo analisado. Para um determinado caso, talvez o melhor seja considerar *abertos*, talvez *vizinhanças*, *redes*, *sequências*, *fechados*, *filtros* e etc.

Parte I

Espaços Métricos

Definição e Propriedades

Vamos descrever (definir) o que se entende por *espaço métrico* (definição 1.1), e estudar propriedades desses espaços que nos motivarão a definir o conceito mais geral de espaço topológico (definição 4.1).

Os conhecimentos adquiridos neste capítulo serão importantes para que o leitor possa ter exemplos concretos e também motivação suficiente para reconhecer a utilidade e aceitar com naturalidade os conceitos que serão apresentados nos capítulos seguintes.

1.1 Definição

Um espaço métrico é um conjunto X , munido de uma métrica $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$. A métrica faz com que esteja definida uma noção de *distância* entre os pontos de X .

Definição 1.1 (Métrica). *Seja X um conjunto qualquer. Uma métrica definida sobre X é uma função*

$$\begin{aligned} d : X \times X &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) \end{aligned}$$

que, para todo $x, y, z \in X$, satisfaz

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (*desigualdade triangular*)

Dizemos que (X, d) é um espaço métrico. Em geral, por um abuso de linguagem, quando a métrica d está subentendida, dizemos que X é um espaço métrico.

Em $\mathbb{R}^n$, a métrica usualmente adotada é a métrica euclidiana, dada por

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2}. \quad (1.1)$$

Onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Em várias situações, o item (1) da definição de métrica, nos permitirá concluir que dois pontos $x, y \in X$ são de fato o mesmo ponto. Basta mostrar que $d(x, y) = 0$. O item (3) é o mais importante da definição. É este item que abstrai a idéia de que a distância entre dois pontos está intimamente relacionada com o “menor caminho” entre dois pontos:

Se existe um caminho A , partindo de x e indo para y , e um caminho B , partindo de y e indo para z , então, a menor distância (ou o ínfimo dos comprimentos dos caminhos partindo de x e indo para z) não é maior do que a soma dos comprimentos de A e B . (figura 1.1)

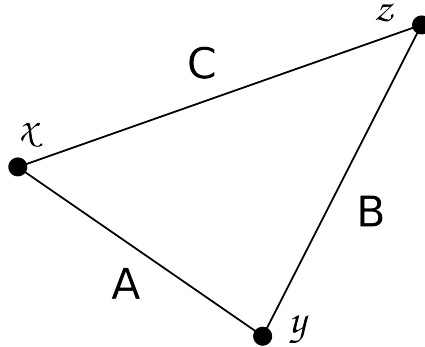


Figura 1.1: Desigualdade triangular: $C \leq A + B$.

Definição 1.2 (Bola). Seja (X, d) um espaço métrico, $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. A bola de centro x e raio ε é o conjunto de todos os pontos que distam de x menos que ε :

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}.$$

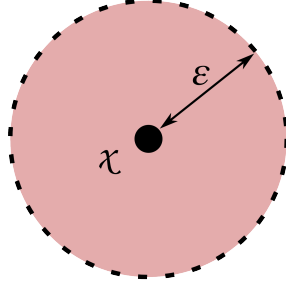


Figura 1.2: A bola de centro x e raio ε .

1.2 Propriedades Elementares

Nesta seção, (X, d) é um espaço métrico. As propriedades mais interessantes dos espaços métricos são consequência da desigualdade triangular. Muitas vezes, essas propriedades são mais fáceis de serem visualizadas quando consideramos a distância euclidiana em $\mathbb{R}^2$. Ou seja, quando fazemos um desenho em uma folha de papel. É importante enfatizar no entanto, que os resultados dependem apenas das propriedades das métricas (definição 1.1). O desenho melhora a intuição, mas não é uma demonstração.

Todas as proposições deste capítulo são muito simples. O leitor deve ser capaz de completar as demonstrações que afirmam, por exemplo, que basta tomar um certo $\delta > 0$ para concluir a demonstração.

Proposição 1.3. *Sejam $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$B_{\frac{1}{n}}(x) \subset B_{\varepsilon}(x).$$

Demonstração. Basta tomar n grande o suficiente para que $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$. □

A seguinte proposição, apesar de muito simples, é fundamental para o desenvolvimento de toda a teoria que se seguirá, e é consequência direta da desigualdade triangular.

Proposição 1.4. *Sejam $x \in X$, $\varepsilon > 0$ e*

$$y \in B_{\varepsilon}(x).$$

Então, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_{\delta}(y) \subset B_{\varepsilon}(x).$$

Veja a figura 1.3.

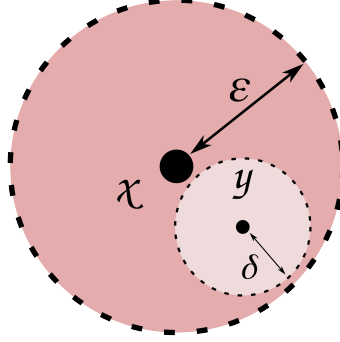


Figura 1.3: Para cada ponto y da bola $B_\varepsilon(x)$, temos uma “bolinha” centrada em y e toda contida em $B_\varepsilon(x)$.

Demonstração. Basta tomar $\delta < \varepsilon - d(x, y)$. Neste caso,

$$\begin{aligned} z \in B_\delta(y) &\Rightarrow d(y, z) < \delta \\ &\Rightarrow d(x, z) < d(x, y) + \delta < \varepsilon \\ &\Rightarrow z \in B_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

□

Proposição 1.5. *Sejam $x_1, x_2 \in X$, e $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Então, dado $z \in B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap B_{\varepsilon_2}(x_2)$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$B_\delta(z) \subset B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap B_{\varepsilon_2}(x_2).$$

Veja a figura 1.4.

Demonstração. Pela proposição 1.4, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} B_{\delta_1}(z) &\subset B_{\varepsilon_1}(x_1) \\ B_{\delta_2}(z) &\subset B_{\varepsilon_2}(x_2). \end{aligned}$$

Basta portanto tomar qualquer $\delta \leq \min(\delta_1, \delta_2)$.

□

Repare que a proposição “vale” para qualquer número finito de bolas $B_{\varepsilon_1}(x_1), \dots, B_{\varepsilon_n}(x_n)$. Mas não “vale” para um número infinito de bolas.

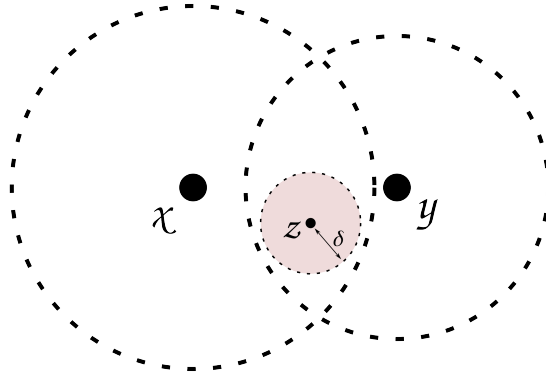


Figura 1.4: Para cada ponto z da interseção $B_{\epsilon_1}(x) \cap B_{\epsilon_2}(y)$, temos uma “bolinha” centrada em z e toda contida na interseção.

Proposição 1.6. *Sejam $x, y \in X$ dois pontos distintos de X . Então existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$B_\epsilon(x) \cap B_\epsilon(y) = \emptyset.$$

Veja a figura 1.5.

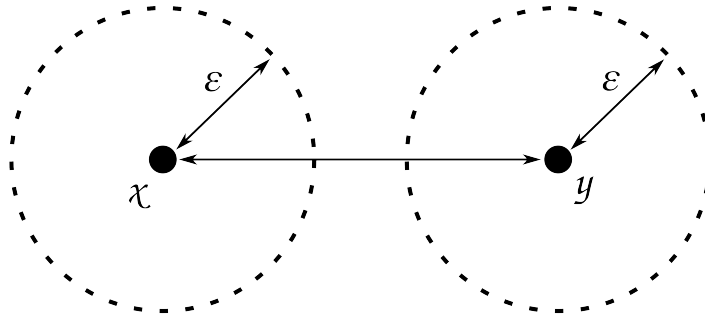


Figura 1.5: Dois pontos distintos x e y podem ser “separados” por bolas disjuntas.

Demonstração. Como $x \neq y$, temos que $d(x, y) > 0$. Basta tomar

$$\epsilon \leq \frac{d(x, y)}{2}.$$

□

Proposição 1.7. *Seja $x \in X$. Então,*

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} B_\varepsilon(x) = \{x\}.$$

Demonstração. Basta mostrar que dado $y \in X$ com $y \neq x$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$y \notin B_\varepsilon(x).$$

Basta tomar $\varepsilon \leq d(x, y)$. Ou então notar que isso segue como um caso particular da proposição 1.6. $\square$

1.3 Exemplos

Exemplo 1.8 (Métrica Usual dos Reais (métrica euclidiana)). Considere o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. A seguinte métrica é a métrica usual dos números reais:

$$d_{|\cdot|}(x, y) = |y - x|.$$

O espaço $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ é um espaço métrico.

Exemplo 1.9 (Métrica Discreta). Seja X um conjunto qualquer. Então, definimos a *métrica discreta* em X por

$$d_d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}.$$

Exemplo 1.10 (Métrica Euclidiana de $\mathbb{R}^n$). Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Agora, defina

$$d(x, y) = \|y - x\|,$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana de $\mathbb{R}^n$. O espaço $(\mathbb{R}^n, d)$ é um espaço métrico. Além do mais, possui as seguintes propriedades:

1. Para todo $a, x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x + a, y + a) = d(x, y)$.
2. Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|d(x, y)$.

Poderíamos ter feito o mesmo para dois (ou mais) espaços métricos quaisquer, (A, d_A) e (B, d_B) , e definido a seguinte métrica em $A \times B$:

$$d((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = \sqrt{d_A(a_1, a_2)^2 + d_B(b_1, b_2)^2}.$$

Exemplo 1.11 (Métrica do Máximo em $\mathbb{R}^n$). Novamente, considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ elementos de $\mathbb{R}^n$. Então, defina

$$d(x, y) = \max_{1 \leq j \leq n} |y_j - x_j|,$$

O espaço $(\mathbb{R}^n, d)$ é um espaço métrico. Nesta métrica, as bolas são na verdade “quadrados”. :-)

Poderíamos ter feito o mesmo para dois (ou mais) espaços métricos quaisquer, (A, d_A) e (B, d_B) , e definido a seguinte métrica em $A \times B$:

$$d((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = \max(d_A(a_1, a_2), d_B(b_1, b_2)).$$

Esta métrica é topologicamente equivalente à métrica euclidiana. (por quê?)

Exemplo 1.12 (Métrica da Soma em $\mathbb{R}^n$). Novamente, considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ elementos de $\mathbb{R}^n$. Então, defina

$$d(x, y) = \sum_{1 \leq j \leq n} |y_j - x_j|,$$

O espaço $(\mathbb{R}^n, d)$ é um espaço métrico.

Novamente, poderíamos ter feito o mesmo para dois (ou mais) espaços métricos, (A, d_A) e (B, d_B) , e definido a seguinte métrica em $A \times B$:

$$d((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = d_A(a_1, a_2) + d_B(b_1, b_2).$$

Esta métrica é topologicamente equivalente à métrica euclidiana. (por quê?)

Exemplo 1.13 (Os Complexos e o $\mathbb{R}^2$). Podemos identificar um número complexo $z = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ com o elemento $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Assim, usando a métrica euclidiana de $\mathbb{R}^2$, obtemos a métrica

$$d(\alpha_1 + \beta_1 i, \alpha_2 + \beta_2 i) = \sqrt{(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2 - \beta_1)^2}.$$

Exemplo 1.14 (Identificando Dois Conjuntos). O que fizemos no exemplo 1.13, poderia ter sido feito para qualquer aplicação injetiva. Se (X, d_X) é um espaço métrico, e $f : Y \rightarrow X$ é uma injeção partindo de um conjunto qualquer Y , então podemos definir a seguinte métrica no conjunto Y :

$$d_Y(y_1, y_2) = d_X(f(y_1), f(y_2)).$$

Exemplo 1.15 (Restrição a um Subconjunto). Seja (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$. Então, $(A, d|_{A \times A})$ é também um espaço métrico. De fato, esta construção é exatamente o que foi feito no exemplo 1.14 onde a identificação entre A e X é a identidade:

$$\begin{aligned} \text{id} : A &\rightarrow X \\ a &\mapsto a \end{aligned}$$

Exemplo 1.16. Seja X um conjunto qualquer. Denote por F o conjunto de todas as funções $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. A seguinte função NÃO é uma métrica em F :

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |g(x) - f(x)|.$$

Isso porque é possível que $d(f, g) = \infty$. No entanto, se considerarmos o conjunto $F' = \{f \in F \mid d(f, 0) < \infty\}$, onde 0 representa a função constante de valor 0 , então $(F', d|_{F'})$ é um espaço métrico. Note que poderíamos ter usado qualquer outra função no lugar de 0 .

Sempre podemos fazer isso quando uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ satisfaz, com exceção da possibilidade de assumir o valor ∞ , as condições para ser uma métrica listadas na definição 1.1. Esse artifício é utilizado por exemplo, em análise funcional, quando se estudam os chamados espaços L^p . É importante notar que a função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ está bem definida. Apenas não é uma métrica se assumir o valor ∞ .

Topologia Usando uma Métrica

Vamos ver como a métrica (distância) é utilizada para descrever aspectos topológicos dos espaços métricos. Veremos como uma métrica é utilizada para descrever *convergência de seqüências* (definição 2.1) e *continuidade de funções* (definição 2.7 e proposição 2.10).

Neste capítulo, (X, d) é um espaço métrico.

2.1 Seqüências e Convergência

Seja $n \in \mathbb{N}$. A seqüência de pontos $x_n = \frac{1}{n}$ é tal que, “na medida que n se torna suficientemente grande, a seqüência x_n se aproxima de 0”. Nesta sessão, vamos formalizar o que entendemos por:

Na medida que n se torna suficientemente grande, $\frac{1}{n}$ se aproxima de 0.

Para um espaço métrico X , a noção de “se aproxima de” é um tanto quanto natural, já que temos uma métrica que nos dá uma noção de distância. A grosso modo, $x_n \in X$ se aproxima de x quando a distância entre x_n e x , $d(x_n, x)$, se aproxima de 0. Faltaria então definir o que significa dizer que a seqüência de números reais $d(x_n, x)$ “se aproxima” de 0.

Definição 2.1 (Convergência). *Sejam (X, d) um espaço métrico e $x_n \in X$ ($n \in \mathbb{N}$) uma seqüência de pontos de X . Dizemos que x_n converge para um certo $x \in X$, e denotamos tal fato por*

$$x_n \rightarrow x,$$

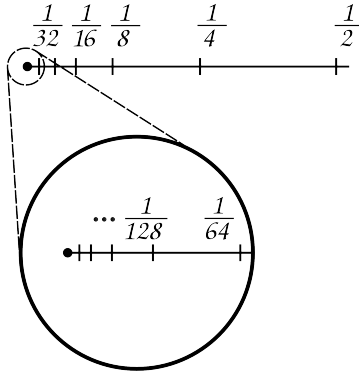


Figura 2.1: A sequência $\frac{1}{2^n}$ “se aproxima” de 0.

— ou $x_n \xrightarrow{d} x$, se quisermos enfatizar que a convergência é na métrica d — quando para todo $\varepsilon > 0$, existir $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Também dizemos que x é o limite da sequência x_n e escrevemos $x = \lim x_n$.

A definição 2.1 generaliza o que já fazemos para os números reais. No caso dos números reais, usualmente adotamos a métrica $d(x, y) = |y - x|$.

Definição 2.2 (Convergência usual em $\mathbb{R}$). *Seja $\alpha_n \in \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$). Dizemos que α_n converge para $\alpha \in \mathbb{R}$, e denotamos tal fato por $\alpha_n \rightarrow \alpha$, quando para todo $\varepsilon > 0$, existir $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq N \Rightarrow |\alpha - \alpha_n| < \varepsilon.$$

Poderíamos ter tomado um outro caminho. Já de posse da definição 2.2, poderíamos ter definido convergência em espaços métricos de acordo com a seguinte proposição.

Proposição 2.3. *Seja $x_n \in X$ uma sequência. Faça $d_n = d(x_n, x)$. Então*

$$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow d_n \rightarrow 0.$$

Onde a convergência do lado direito é dada pela definição 2.2 ou, equivalentemente, pela métrica euclidiana em $\mathbb{R}$.

Demonstração. É evidente, pois $d(x_n, x) \rightarrow 0$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

□

Proposição 2.4. *Seja $x_n \in X$ uma sequência e $x \in X$. Então são equivalentes:*

1. *A sequência converge para x : $x_n \rightarrow x$.*
2. *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow x_n \in B_\varepsilon(x)$.*
3. *Para todo $m \in \mathbb{N}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow x_n \in B_{\frac{1}{m}}(x)$.*

Demonstração. A equivalência entre os itens (2) e (3) segue da proposição 1.3.

Para a equivalência entre (1) e (2), basta notar que $x_n \in B_\varepsilon(x) \Leftrightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$, e então fazer a substituição na definição 2.1. □

Definição 2.5 (Métricas topologicamente equivalentes). *Enquanto não definimos o que é uma topologia, vamos dizer que duas métricas d_1 e d_2 sobre X determinam a mesma topologia (são topologicamente equivalentes) quando*

$$x_n \xrightarrow{d_1} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{d_2} x.$$

O objetivo da primeira parte deste livro é o de dar motivação para os conceitos de topologia geral que serão apresentados na segunda parte. A este propósito serve a proposição 2.4, que apresenta maneiras alternativas de se olhar para a convergência de sequências em espaços métricos. Na medida em que substituímos a métrica $d(x_n, x)$ pela bola $B_\varepsilon(x)$, as formulações ficam mais parecidas com suas correspondentes para espaços topológicos gerais

2.2 Continuidade

Olhando para o gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ na figura 2.2, você diria que f é contínua em a ?

De que modo podemos expressar formalmente o significado de f ser ou não contínua em a ? Note que no exemplo da figura 2.2,

$$f\left(a + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 2 \neq f(a).$$

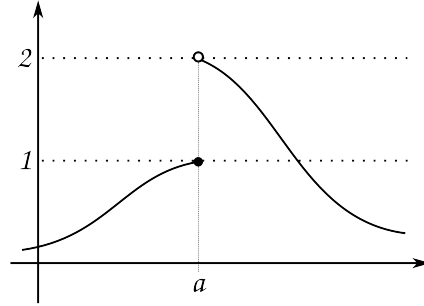


Figura 2.2: Como formular matematicamente que f é descontínua em a ?

Muitos expressam esse fato dizendo que f tem um “salto” em a .

Definição 2.6. *Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos. Dizemos que $f : X \rightarrow Y$ é contínua em $a \in X$ quando*

$$a_n \rightarrow a \Rightarrow f(a_n) \rightarrow f(a).$$

Definição 2.7. *Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos. Dizemos que $f : X \rightarrow Y$ é contínua quando for contínua em todo ponto $a \in X$.*

Notação. *Também escrevemos $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ para indicar que estamos considerando os espaços métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) , e que f é uma função de X em Y .*

Observação 2.8. A continuidade depende apenas da “topologia” dos espaços considerados. Se $f : X \rightarrow Y$ é contínua quando considerados os espaços métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) , então será contínua nos espaços (X, d'_X) e (Y, d'_Y) sempre que as métricas d_X e d_Y forem equivalentes a d'_X e d'_Y , respectivamente.

2.3 Topologia com Bolas

Até o presente momento, temos trabalhado com sequências. Nesta seção vamos formular os mesmos conceitos utilizando bolas. Para que a transição entre sequências e bolas seja suave, vamos começar reavaliando a proposição 2.4.

A proposição afirma que dizer que x_n converge para x é o mesmo que dizer que toda bola centrada em x contém todos os x_n , exceto talvez para

uma quantidade finita de índices n . Note que na proposição 2.4 falávamos em “para todo $\varepsilon > 0$ ”, mas isso é o mesmo que dizer “para toda bola”!

Resumindo o que já havia sido feito, temos a seguinte caracterização para a convergência de uma sequência.

Proposição 2.9. *Seja X um espaço métrico e $x_n \in X$ uma sequência de elementos de X . Então, x_n converge para $x \in X$ se, e somente se, para toda bola $B_\varepsilon(x)$ centrada em x , existir $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in B_\varepsilon(x).$$

Demonstração. Veja a proposição 2.4. □

Proposição 2.10. *Sejam X e Y espaços métricos. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *A função $f : X \rightarrow Y$ é contínua em $a \in X$.*
2. *Para toda bola $B_{f(a)} = B_\varepsilon(f(a))$ centrada em $f(a)$, existe uma bola $B_a = B_\delta(a)$ centrada em a , tal que*

$$f(B_a) \subset B_{f(a)}.$$

3. *Para toda bola $B = B_\varepsilon(f(a))$ centrada em $f(a)$, $f^{-1}(B)$ contém alguma bola centrada em a .*

Demonstração. ■ (2) $\Leftrightarrow$ (3)

A equivalência entre os itens (2) e (3) é evidente, já que dizer que existe uma bola é o mesmo que dizer que existe $\delta > 0$.

■ (2) $\Rightarrow$ (1)

Vamos mostrar que o item (2) implica na continuidade de f no ponto a de acordo com a definição 2.6. Seja $x_n \rightarrow a$. Vamos mostrar que $f(x_n) \rightarrow f(a)$. Tome uma bola qualquer B centrada em $f(a)$. Por hipótese, existe uma bola B_a centrada em a tal que

$$f(B_a) \subset B.$$

Pela proposição 2.9, temos que $x_n \in B_a$ exceto para um número finito de índices n . Ou seja, $f(x_n) \in f(B_a) \subset B$, exceto para um número finito de índices. O que pela proposição 2.9 é o mesmo que dizer que $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

■ (1) $\Rightarrow$ (3)

Suponha então que o item (3) não vale. Neste caso, existe uma bola B centrada em $f(a)$ tal que $f^{-1}(B)$ não contém nenhuma bola centrada em a . Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolha $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a)$ tal que $f(x_n) \notin B$. A sequência x_n converge para a (por quê?), mas $f(x_n)$ não converge para $f(a)$ (por quê?). $\square$

Observação 2.11. Repare como o item 2 se assemelha à definição de continuidade que utiliza argumentos do tipo $\varepsilon - \delta$:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Observação 2.12. Para mostrar que a negação do item (3) implica na não continuidade de f , construímos uma sequência $x_n \rightarrow a$ tal que $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$. Para isso, utilizamos as bolas $B_{\frac{1}{n}}(a)$ e a proposição 1.3.

Topologia de Espaços Métricos: releitura

Neste capítulo, vamos fazer uma releitura do que estudamos no capítulo 2. Desta vez, vamos tentar eliminar o máximo possível os argumentos do tipo “epsilon e delta”. O objetivo é apresentar a topologia dos espaços métricos utilizando a métrica o mínimo possível, de modo a tornar a apresentação dos conceitos mais parecida com seus correspondentes quando trabalhamos com a chamada *topologia geral* (definição 4.1).

O conceito mais importante e mais enfatizado nos cursos de topologia é o de *conjunto aberto* (definição 3.10). No entanto, o conceito de *vizinhança* (definição 3.1) é muito mais fundamental e mais natural, principalmente quando se faz o paralelo entre o ponto de vista da *topologia geral* e a topologia dos espaços métricos. O conceito de vizinhança é muito mais próximo e generaliza muito melhor o que se faz quando se utiliza argumentos com bolas, ou argumentos do tipo “epsilon e delta”, muito comuns quando tratamos de espaços métricos.

3.1 Vizinhanças

Quando falamos de convergência e continuidade nos capítulos anteriores, estávamos de posse de uma métrica. A métrica nos dava a noção de distância que nos permitia falar de “proximidade”. Quando dizemos que x_n converge para x , não estamos de fato interessados nos pontos que estão “longe” de x . Estamos interessados apenas nos que estão “próximos”. De fato, poderíamos nos restringir apenas a bolas “pequenas”. Poderíamos

nos restringir a bolas de raio menor que 1. Ou então, a bolas de raio $\frac{1}{2^n}$. Ou, de modo um pouco mais geral, poderíamos nos restringir a bolas de raio $\varepsilon_n > 0$, onde ε_n é uma sequência qualquer tal que $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

Quando x_n converge para x , é porque se V é um conjunto que contém x e é de certa forma um conjunto *suficientemente grande*, conterá toda a sequência x_n , exceto para uma quantidade finita de índices n . Esse *suficientemente grande*, no caso de espaços métricos, significa que existe uma bola B centrada em x tal que $B \subset V$. A esses conjuntos *suficientemente grandes*, chamamos de *vizinhanças de x* . (veja a proposição 2.9)

Definição 3.1. *Seja X um espaço métrico e $x \in X$. Todo conjunto $V \subset X$ que contém uma bola centrada em x é chamado de vizinhança de x . Denotamos por $\mathcal{V}(x)$ o conjunto de todas as vizinhanças do ponto x .*

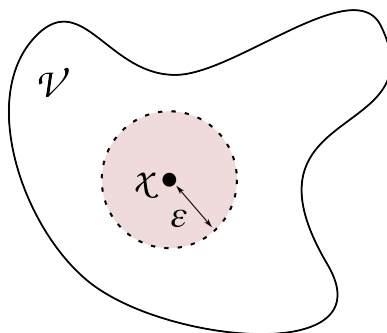


Figura 3.1: O conjunto V é uma vizinhança x pois é “grande” o suficiente para conter uma bola centrada em x .

É imediato que toda bola centrada em x é uma vizinhança de x . Mais do que isso, pela proposição 1.4, uma bola é vizinhança de todos os seus pontos. Esta propriedade está formalizada na proposição seguinte.

Proposição 3.2. *Se $B \subset X$ é uma bola em um espaço métrico X . Então,*

$$y \in B \Rightarrow B \in \mathcal{V}(y).$$

Ou seja, uma bola é vizinhança de todos os seus pontos.

Demonstração. Veja a proposição 1.4. Ou, para um argumento mais visual, compare as figuras 1.3 e 3.1. $\square$

A seguir, apresentamos algumas propriedades elementares das vizinhanças de um ponto.

Proposição 3.3. *Seja X um espaço métrico e $x_n, x \in X$. Então*

$$x_n \rightarrow x$$

se, e somente se, para toda vizinhança de x , $V \in \mathcal{V}(x)$, existir $N = N_V \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in V.$$

Demonstração. Tome uma bola B centrada em x tal que $B \subset V$. Para esta bola existe $N = N_B$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in B.$$

Em particular,

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in V.$$

□

Proposição 3.4. *Seja X um espaço métrico e $x \in X$. Então valem as seguintes afirmações sobre a família $\mathcal{V}(x)$ de todas as vizinhanças de x :*

1. *Se $A \in \mathcal{V}(x)$ e $A \subset B$, então $B \in \mathcal{V}(x)$.*
2. *A interseção de duas vizinhanças de x também é uma vizinhança de x . Ou seja, se $A, B \in \mathcal{V}(x)$, então $A \cap B \in \mathcal{V}(x)$.*
3. *Se $A \in \mathcal{V}(x)$ então existe $B \subset A$ tal que $x \in B$ e B é vizinhança de todos os seus pontos.*

Demonstração. O item (1) é imediato.

O item (2) é imediato do fato que as bolas centradas em x são totalmente ordenadas. Ou seja, a que tiver o menor raio estará contida em ambos os conjuntos.

O item (3) é uma re-interpretação da proposição 3.2. Basta tomar B como sendo uma bola centrada em x contida em A . □

Observação 3.5. Das propriedades listadas na proposição 3.4, o item (3) é o de interpretação mais difícil. Vamos voltar a discutí-lo no em vários momentos durante a exposição sobre topologia geral, e principalmente no capítulo ???. Uma das implicações do item (3), é a seguinte. A explicação pode ser acompanhada na figura 3.2. Seja $V \in \mathcal{V}(x)$. Suponha que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenhamos uma sequência $x_m^n \notin V$, indexada por m , que converge

para x_n . Então, não é possível que a sequência x_n convirja para x . De fato, o item (3) da proposição implica na existência de uma vizinhança aberta de x contida em V . Vamos chamar essa vizinhança de B , que na figura representamos sugestivamente como uma “bola”. Assim, se tivéssemos que x_n converge para x , teríamos que para algum $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in B$. Como B também é vizinhança de x_k (já que é vizinhança de todos os seus pontos), e como $x_m^k \rightarrow x_k$, teríamos que para algum $j \in \mathbb{N}$, $x_j^k \in B$. Contrariando o fato de que $x_j^k \notin V$.

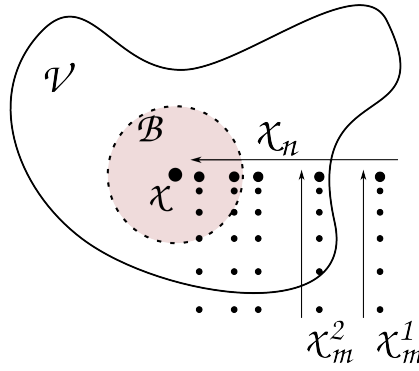


Figura 3.2: Se $x_n \rightarrow x$, então algum x_m^n pertence a V . Este fato se deve ao item (3) da proposição 3.4.

3.2 Continuidade em um Ponto

Usando vizinhanças para expressar continuidade a formulação fica muito simples. O trabalho todo já foi feito na proposição 2.10.

Notação. *Seja X um conjunto. Chamamos de partes de X , e denotamos por $\mathcal{P}(X)$ a família formada por todos os subconjuntos de X .*

Se $f : X \rightarrow Y$ e $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(Y)$, escrevemos $f^{-1}(\mathcal{F})$ para indicar a família

$$f^{-1}(\mathcal{F}) = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{F}\}.$$

Assim, podemos olhar para f^{-1} como sendo a aplicação

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathcal{P}(Y) &\rightarrow \mathcal{P}(X) \\ A &\mapsto f^{-1}(A) \end{aligned}.$$

Proposição 3.6. *Sejam X e Y espaços métricos. Então $f : X \rightarrow Y$ é contínua em $a \in X$ se, e somente se,*

$$f^{-1}(\mathcal{V}(f(a))) \subset \mathcal{V}(a).$$

Demonstração. Tome $V \in \mathcal{V}(f(a))$. Então existe uma bola B centrada em $f(a)$, tal que $B \subset V$. Pela proposição 2.10, $f^{-1}(B) \in \mathcal{V}(a)$. Como $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(V)$, temos que $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$.

Por outro lado, se $f^{-1}(\mathcal{V}(f(a))) \subset \mathcal{V}(a)$, teremos que em particular $f^{-1}(B) \in \mathcal{V}(a)$ para toda bola centrada em $f(a)$. Ou seja, $f^{-1}(B)$ contém uma bola centrada em a para toda bola B centrada em $f(a)$. Novamente, pela proposição 2.10, isso implica que f é contínua em a . $\square$

Em se tratando de espaços métricos, tanto a definição 2.6, quanto qualquer uma de suas formulações equivalentes dadas pelas proposições 2.10 e 3.6, poderiam ser utilizadas como a definição de continuidade em um ponto. Poderíamos ter escolhido um caminho diferente e adotado uma definição de continuidade no estilo

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Cada caracterização enfatiza um aspecto diferente do fenômeno de continuidade. É importante que não nos acomodemos a apenas uma delas, mas que escolhamos a mais adequada à situação.

3.3 Base de Vizinhanças

Quando definimos o que seriam as vizinhanças de um ponto $x \in X$ de um espaço métrico, utilizamos as bolas centradas em x . Chamando de $\mathcal{B}$ a família das bolas centradas em x , temos que

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{V}(x).$$

Além do mais, todo conjunto $V \in \mathcal{V}(x)$ contém um conjunto $B \in \mathcal{B}$. Ou seja, a sub-família $\mathcal{B}$ determina quais são as vizinhanças de x . Poderíamos ter nos restringido às bolas de raio $\frac{1}{n}$ para compor a família $\mathcal{B}$. As vizinhanças “geradas” por essa nova família $\mathcal{B}$ seriam exatamente as mesmas.

Definição 3.7. *Seja $\mathcal{V}(x)$ a família de todas as vizinhanças de $x \in X$, onde X é um espaço métrico. Então, dizemos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}(x)$ é uma base de vizinhanças de x quando*

$$\mathcal{V}(x) = \{V \subset X \mid \exists B \in \mathcal{B}, \text{ com } B \subset V\}$$

Proposição 3.8. *Seja X um espaço métrico e $x \in X$. Seja também $\mathcal{B}$ uma base de vizinhanças de x . Então, uma sequência x_n converge para x se, e somente se, para todo $B \in \mathcal{B}$ existir $N = N(B) \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in B.$$

Demonstração. Dado $V \in \mathcal{V}(x)$, escolha $B \in \mathcal{B}$ satisfazendo $B \subset V$. Então, por hipótese, existe $N = N(B) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N(V) = N(B) \Rightarrow x_n \in B \subset V.$$

Portanto, $x_n \rightarrow x$. □

Proposição 3.9. *Sejam X e Y espaços métricos e $f : X \rightarrow Y$. Sejam $a \in X$ e $\mathcal{B}$ uma base de vizinhanças de $f(a)$. Então, f é contínua em a se, e somente se,*

$$f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{V}(a).$$

Demonstração. Pela proposição 3.6, basta mostrar que

$$f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{V}(a) \Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{V}(f(a))) \subset \mathcal{V}(a).$$

Uma direção é óbvia, já que $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}(f(a))$. Suponha então que $V \in \mathcal{V}(f(a))$. Neste caso, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset V$. Assim, $f^{-1}(V) \supset f^{-1}(B) \in \mathcal{V}(a)$. Portanto, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$. □

A aplicação mais imediata da proposição é a equivalência entre as seguintes afirmações, que são definições alternativas para a continuidade de f no ponto a :

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x, a) < \frac{1}{m} \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \frac{1}{n}.$$

3.4 Conjuntos Abertos

Um conjunto aberto é um conjunto que é vizinhança de todos os seus pontos. A proposição 1.4 mostra que em um espaço métrico, todas as bolas são abertas. Por isso, muitos autores usam a expressão *bola aberta* para se referirem ao que neste livro definimos como *bola*. Ainda vamos formalizar isso melhor, mas os conjuntos abertos caracterizam toda a topologia do espaço, haja visto que a família

$$\mathcal{A}_x = \{V \in \mathcal{V}(x) \mid V \text{ é aberto}\}$$

é uma base de vizinhanças de x para todo $x \in X$. (veja o item (3) da proposição 3.4)

Conhecendo todos os conjuntos abertos, sabemos quem são as sequências convergentes, quais funções são ou não contínuas e, conforme já mencionado, quais são as vizinhanças de um ponto.

Definição 3.10. *Seja X um espaço métrico. Dizemos que um conjunto $A \subset X$ é aberto quando satisfaz*

$$x \in A \Rightarrow A \in \mathcal{V}(x).$$

Definição 3.11. *Dado um espaço métrico (X, d) , a topologia de X induzida por d , denotada por τ_d — ou, mais comumente, por um abuso de notação, denotada por τ_X — é a família de todos os abertos de X . Isto é,*

$$\tau_X = \{A \subset X \mid A \text{ é aberto}\}.$$

Proposição 3.12. *Seja X um espaço métrico e $x \in X$. Então a família*

$$\mathcal{A}_x = \mathcal{V}(x) \cap \tau_X$$

é uma base de vizinhanças de x .

Demonstração. Basta notar que, chamando de $\mathcal{B}$ a coleção de todas as bolas centradas em x ,

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_x \subset \mathcal{V}(x).$$

Como $\mathcal{B}$ é uma base de vizinhanças de x , qualquer família “entre” $\mathcal{B}$ e $\mathcal{V}(x)$ também é uma base de vizinhanças de x . (porquê?) $\square$

Proposição 3.13. *Seja X um espaço métrico. Então, τ_X tem as seguintes propriedades:*

1. $\emptyset, X \in \tau_X$.

2. Se $A, B \in \tau_X$, então $A \cap B \in \tau_X$.

3. Se $A_\lambda \in \tau_X$ para uma família qualquer de índices $\lambda \in \Lambda$, então $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau_X$.

Demonstração. Para o item (1), é fácil ver que X é vizinhança de qualquer ponto $x \in X$. Para o conjunto vazio ... note que todos os elementos do conjunto vazio satisfazem a propriedade que você quiser. Neste caso, a propriedade de terem $\emptyset$ como vizinhança. Em suma:

$$x \in \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{V}(x).$$

E portanto, $\emptyset \in \tau_X$.

O item (2) é consequência do item (2) da proposição 3.4. Ou seja, se $x \in A \cap B$, como A e B são vizinhanças de x , então $A \cap B$ também é. Assim, $A \cap B$ é vizinhança de todos os seus pontos.

Do mesmo modo, o item (3) é consequência do item (1) da proposição 3.4, pois

$$x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \Rightarrow \exists \lambda \in \Lambda, x \in A_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathcal{V}(x).$$

Ou seja, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ é vizinhança de todos os seus pontos e é portanto aberto. $\square$

Proposição 3.14. *Seja X um espaço métrico e $A \subset X$. Então, são equivalentes:*

1. O conjunto A é aberto.
2. O conjunto A pode ser escrito como uma união de bolas.

Demonstração. Se A é aberto, então para cada ponto $x \in A$ existe uma bola B_x centrada em x e contida em A . Desta forma, é evidente que

$$A = \bigcup_{x \in A} B_x.$$

Ou seja, A é uma união de bolas.

Por outro lado, sabemos que as bolas são conjunto abertos. Assim, qualquer conjunto que seja uma união de bolas é, pelo item (3) da proposição 3.13, um conjunto aberto. $\square$

Sequências e Convergência com Abertos

Dado um espaço métrico X . Podemos caracterizar o fenômeno de convergência em termos de sua topologia τ_X ? De fato, para dizer se $x_n \in X$ converge ou não para um certo $x \in X$, de acordo com a proposição 3.8, precisamos apenas conhecer uma base de vizinhanças de x qualquer. Sabemos que os abertos que contêm x formam uma base de vizinhanças de x . Sendo assim, concluímos que x_n converge para x se, e somente se, para todo aberto A que contenha o ponto x existir $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in A.$$

3.5 Continuidade em Todo Ponto

Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ entre espaços métricos X e Y é contínua quando é contínua em todo ponto do seu domínio. Se considerarmos $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$, a função f será contínua em $x \in X$ quando f^{-1} levar vizinhanças de $f(x)$ em vizinhanças de x . Sendo assim, para f contínua, se $A \subset Y$ for um conjunto aberto (vizinhança de todos os seus pontos), então $f^{-1}(A)$ será também vizinhança de todos os seus pontos. Ou seja, se f é contínua, então $f^{-1}(\tau_Y) \subset \tau_X$. Vamos formalizar isso.

Proposição 3.15. *Sejam X e Y espaços métricos, e $f : X \rightarrow Y$ uma função qualquer. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *A função f é contínua em todo ponto de X .*
2. *A imagem inversa de um aberto é também um conjunto aberto. Ou seja, $f^{-1}(\tau_Y) \subset \tau_X$.*

Demonstração. ■ $(2) \Rightarrow (1)$

Seja $A \in \tau_Y$. Então, para todo $x \in f^{-1}(A)$ temos que A é vizinhança de $f(x)$, e pela proposição 3.6, $f^{-1}(A)$ é vizinhança de x . Ou seja, $f^{-1}(A)$ é aberto.

■ $(1) \Rightarrow (2)$

Sabemos pela proposição 3.12 que para todo $x \in X$,

$$\mathcal{A}_{f(x)} = \mathcal{V}(f(x)) \cap \tau_Y$$

é uma base de vizinhanças de $f(x)$. Pelo item (2), temos que $f^{-1}(\mathcal{A}_{f(x)})$ é aberto e obviamente contém x . Ou seja, $f^{-1}(\mathcal{A}_{f(x)}) \in \mathcal{V}(x)$. Pela proposição 3.9, segue que f é contínua em x . $\square$

O exemplo seguinte mostra que nem toda bijeção contínua tem inversa contínua.

Exemplo 3.16. Considere $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ e $(\mathbb{R}, d_d)$ os espaços métricos dados pelos números reais com a métrica euclidiana (exemplo 1.8) e a métrica discreta (exemplo 1.9), respectivamente. Então, a aplicação identidade

$$\text{id} : (\mathbb{R}, d_d) \rightarrow (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$$

é contínua, mas sua inversa não é. De fato, na topologia dada pela métrica discreta, todos os conjuntos são abertos. Ou seja, $\tau_{d_d} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

E o que significa então dizer que $f : X \rightarrow Y$ é bijetiva, contínua e sua inversa é contínua? O fato de ser uma bijeção implica que podemos identificar os pontos de X com os pontos de Y . O fato de ser contínua com inversa contínua significa que com essa identificação as estruturas topológicas τ_X e τ_Y também são identificadas. Esse tipo de função f é chamada de *homomorfismo*. De modo geral, quando $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ é uma função bijetiva qualquer, contínua ou não, com inversa também podendo ser ou não contínua, podemos transportar a métrica d_Y para X como feito no exemplo 1.14:

$$d'(a, b) = d_Y(f(a), f(b)).$$

Desta forma, reduzimos o problema ao caso da aplicação identidade

$$\text{id} : (X, d_X) \rightarrow (X, d'),$$

pois a aplicação f será contínua (ou sua inversa será contínua) se, e somente se, a identidade o for. Em outras palavras, dizer que f é contínua é o mesmo que dizer que $\tau_{d'} \subset \tau_{d_X}$. Dizer que a inversa de f é contínua, é o mesmo que dizer que $\tau_{d_X} \subset \tau_{d'}$. Assim, f será um homeomorfismo quando $\tau_{d'} = \tau_{d_X}$.

Definição 3.17. Se X e Y são espaços métricos, então uma função $f : X \rightarrow Y$ é chamada de homomorfismo quando é bijetiva, contínua com inversa também contínua.

Parte II

Topologia Geral

Motivação e Definições

4.1 Motivação

Esta seção não é formal. Nosso propósito aqui é apenas dar motivação para as definições e propriedades que serão estudadas nas seções seguintes. Se o leitor não se sentir confortável com as divagações desta seção, pode omití-la sem problemas.

Nossa motivação é obviamente o estudo que acabamos de fazer de *espaços métricos*. Devidamente motivados pelo estudo feito na primeira parte do livro, vamos abstrair o que seria a essência dos fenômenos de *convergência* e *continuidade*. Uma alternativa seria associar ao espaço X em questão uma estrutura que identificasse, para cada um dos pontos $x \in X$, quais são e quais não são as sequências que convergem para x . Uma deficiência desta abordagem está na dependência para com o conjunto dos números naturais, que indexam as tais sequências. Futuramente, veremos que uma solução alternativa é o uso de “redes” em substituição ao de sequência. Esta abordagem será feita no capítulo ??.

Outra maneira seria associar a X uma estrutura que indicasse, quais são os conjuntos que formam as “vizinhanças” de cada ponto de X . As vizinhanças de $x \in X$ indicam do que é que x está “próximo” e do que é que está “afastado”. O ponto x estaria próximo de um conjunto $B \in X$ quando para todo $V \in \mathcal{V}(x)$, tivermos $B \cap V \neq \emptyset$. A palavra “próximo” está entre aspas porque esse não é o termo matemático utilizado. O correto seria dizer que x está no *fecho* de B (definição 6.1), ou que é um ponto de *aderência* de B .

As famílias $\mathcal{V}(x)$ deveriam satisfazer as propriedades listadas na proposição 3.4. O item (1) não gera grandes polêmicas. Para que um

conjunto esteja próximo do ponto, tem que interceptar todas as suas vizinhanças, portanto, acrescentar conjuntos maiores não modificaria a “converência”. Talvez o nome “vizinhança” não seja realmente uma boa escolha, já que sugere que sejam conjuntos pequenos. Não faz diferença no entanto, já que nossos argumentos são do tipo

intercepta todas as vizinhanças, por menores que sejam.

Esse tipo de argumento poderia ser restrito às vizinhanças “pequenas”, mas não faria diferença, e seria complicado dizer o que é um conjunto “grande demais”. Veja a definição de *base de vizinhanças de um ponto* (3.7) e a proposição 3.8. Assim, o item (1) se presta mesmo a maximizar a família $\mathcal{V}(x)$ de modo que o fenômeno de convergência não seja alterado.

Do ponto de vista do fenômeno de convergência, o item (2) também serve ao mesmo propósito de maximizar a família $\mathcal{V}(x)$. Isso porque, se para $U, V \in \mathcal{V}(x)$, existem $N_U, N_V \in \mathbb{N}$ tais que

$$\begin{aligned} n \geq N_U &\Rightarrow x_n \in U \\ n \geq N_V &\Rightarrow x_n \in V \end{aligned}$$

então, fazendo $N_{U \cap V} = \max\{N_U, N_V\}$,

$$n \geq N_{U \cap V} \Rightarrow x_n \in U \cap V.$$

Assim, se U e V são vizinhanças de x , levar ou não em consideração o conjunto $U \cap V$ como sendo vizinhança de x não afetaria o fenômeno de convergência. O que não fosse convergente continuaria não convergente, e o que fosse convergente permaneceria convergente. Já do ponto de vista da idéia de “proximidade”, a condição do item (2) garante que se dois conjuntos A e B estão longe de x , então a união $A \cup B$ também está longe de x . Veja a figura 4.1. Em espaços métricos, todos os pontos estão distantes uns dos outros. Assim, nenhum conjunto finito está “próximo” de x , a menos que o contenha. Por outro lado, uma sequência *infinita* de pontos x_n distintos de x pode convergir para x . No caso de espaços topológicos gerais, é possível que uma família infinita de conjuntos A_n “afastados” de x seja tal que $\bigcup A_n$ esteja “próximo” de x , mas as uniões finitas estarão sempre “afastados” de x .

O item mais difícil de aceitar da proposição 3.4, é o item (3). Como já mencionamos anteriormente, na observação 3.5, este item serve para garantir que se $x_m^n \rightarrow x_n$ e para alguma vizinhança $V \in \mathcal{V}(x)$ for verdade que $x_m^n \notin V$, então não é possível acontecer que $x_n \rightarrow x$. É equivalente a dizer que os abertos que contém $x \in X$ formam uma base de vizinhanças

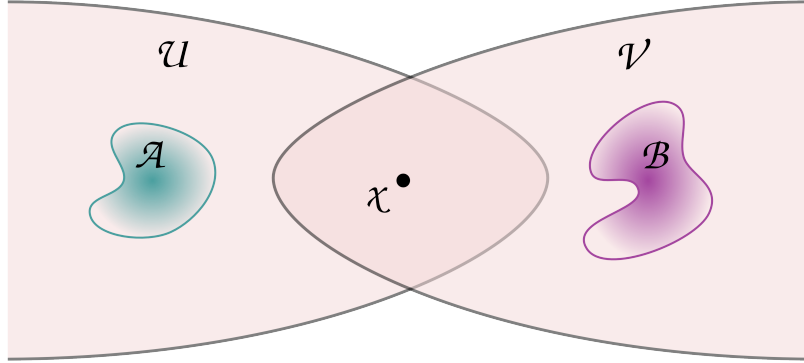


Figura 4.1: O conjunto A está “afastado” de x por não interceptar a vizinhança V . Da mesma forma, B também está “afastado” de x . Então, a união $A \cup B$ também está “afastada” de x , pois $U \cap V$ é vizinhança de x .

de X . É o que garante que se conhecermos os abertos, conheceremos toda a topologia.

Uma outra interpretação para o item (3) pode ser vista através da figura 4.2. Suponha que $A \subset X$ é um conjunto “afastado” de x , e $L \subset X$ é tal que A está próximo de todos os pontos de L . Então, L também é um conjunto “afastado” de x . De fato, se toda vizinhança V de x interceptar L , a condição do item (3) garante a existência de uma vizinhança aberta de x U contida em V . Esta vizinhança U intercepta L , mas por ser um conjunto *aberto*, U é também vizinhança dos pontos $y \in U \cap L$. Como estes pontos estão “próximos” de A , temos que U e, a fortiori, V interceptam A . Ou seja, toda vizinhança de x intercepta A e portanto, A está “próximo” de x . Mais adiante, veremos que a condição imposta ao conjunto L é o mesmo que dizer que L está no *fecho* (definição 6.1) de A . E a condição do item (3) equivale a dizer que a *operação de fecho* é *idempotente*. (veja o item (4) da proposição 6.4)

Já que nossa tentativa de definir “topologia” de um modo abstrato utilizando o conceito de *vizinhança* passa necessariamente pela idéia de *conjunto aberto*, e os conjuntos abertos por si só determinam o que vem a ser uma vizinhança de x (é um conjunto que contém um *aberto* que contém x — proposição 3.12), a opção que vamos adotar, ao menos por enquanto, é a de definir a topologia especificando quais seriam os conjuntos abertos. Para um conjunto X , escolhemos $\tau_X \subset \mathcal{P}(X)$ de modo que τ_X tenha as propriedades listadas na proposição 3.13. Essas propriedades são semelhantes às correspondentes para “vizinhanças”. Dizer que $X \in \tau_X$ é o

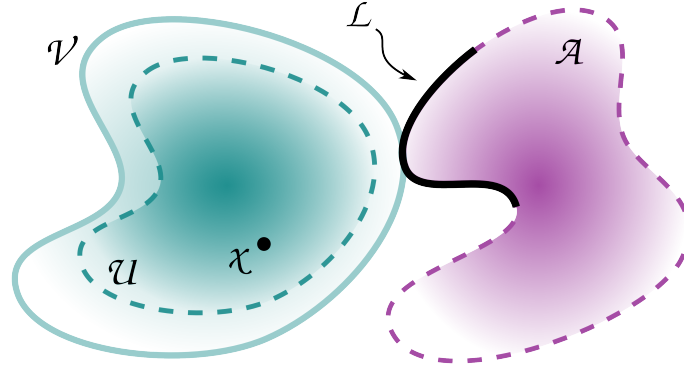


Figura 4.2: Todos os pontos de L estão “próximos” de A , que por sua vez, está “afastado” de x . Então L também está afastado de x , pois se existisse $y \in L \cap U$, então U seria vizinhança de y e, por hipótese, interseitaria A .

mesmo que dizer que todo ponto tem ao menos uma vizinhança (aberta).

4.2 Definição

Agora que, na medida do possível, devidamente motivados, vamos definir o que vem a ser uma topologia em um conjunto X qualquer.

Definição 4.1 (Espaço Topológico). *Seja X um conjunto qualquer. Dizemos que uma família $\tau_X \subset \mathcal{P}(X)$ define uma topologia no espaço X , ou que (X, τ_X) é um espaço topológico, quando τ_X satisfaz:*

1. $\emptyset, X \in \tau_X$.
2. A família τ_X é fechada por interseção finita: $A, B \in \tau_X \Rightarrow A \cap B \in \tau_X$.
3. A família τ_X é fechada por união arbitrária: $A_\lambda \in \tau_X (\lambda \in \Lambda) \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau_X$.

Os subconjuntos $A \subset X$ tais que $A \in \tau_X$ são chamados de abertos do espaço topológico (X, τ_X) . Por um abuso de notação, quando conveniente, dizemos que X é um espaço topológico.

A topologia de um espaço métrico, definida em 3.11 é de fato, pela proposição 3.13, uma topologia no sentido da definição 4.1. Vejamos outros exemplos de topologia.

Exemplos

Exemplo 4.2 (Topologia Discreta). Dado um conjunto qualquer X , $(X, \mathcal{P}(X))$ é um espaço topológico. Esta topologia é induzida, por exemplo, pela métrica discreta mencionada no exemplo 1.9.

Exemplo 4.3 (Topologia Trivial (caótica)). Dado um conjunto qualquer X , $(X, \{\emptyset, X\})$ é um espaço topológico. Se o conjunto X tiver mais do que um elemento, essa topologia nunca é dada (induzida) por uma métrica, pois não satisfaz a proposição 1.6.

Exemplo 4.4 (Topologia da Continuidade Inferior). Considere os números reais $\mathbb{R}$ e a seguinte família de subconjuntos de $\mathbb{R}$

$$\tau_X = \{(\alpha, \infty) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Neste caso, $(\mathbb{R}, \tau_X)$ é um espaço topológico. Assim como no exemplo 4.3, essa topologia também não é induzida por uma métrica.

Do mesmo modo, existe a topologia da *Continuidade Superior*, dada por

$$\tau_X = \{(-\infty, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Exemplo 4.5 (Topologia Inicial). Seja X um conjunto e (Y, τ_Y) um espaço topológico. Considere uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ qualquer. Então $(X, f^{-1}(\tau_Y))$ é um espaço topológico.

4.3 Vizinhanças e Base de Vizinhanças de um Ponto

Assim como fizemos para espaços métricos, podemos definir para um espaço topológico (X, τ_X) , o que é para cada ponto $x \in X$, a família de todas as suas vizinhanças.

Definição 4.6. *Seja (X, τ_X) um espaço topológico. Dado $x \in X$, uma vizinhança aberta de x é um aberto $A \in \tau_X$ que contém o ponto x . Uma vizinhança de x é qualquer conjunto que contenha uma vizinhança aberta de x . Denotamos por $\mathcal{V}(x)$ a família de todas as vizinhanças de x .*

Em um espaço topológico qualquer, as vizinhanças de um ponto possuem as mesmas propriedades que as descritas na proposição 3.4 para o caso de espaços métricos.

Proposição 4.7. *Seja X um espaço topológico, e $x \in X$ um ponto de X . Então valem as seguintes afirmações sobre a família $\mathcal{V}(x)$ de todas as vizinhanças de x :*

1. *Se $A \in \mathcal{V}(x)$ e $A \subset B$, então $B \in \mathcal{V}(x)$.*
2. *A interseção de duas vizinhanças de x também é uma vizinhança de x . Ou seja, se $A, B \in \mathcal{V}(x)$, então $A \cap B \in \mathcal{V}(x)$.*
3. *Se $A \in \mathcal{V}(x)$ então existe $B \subset A$ tal que $x \in B$ e B é vizinhança de todos os seus pontos.*

Demonstração. Todos os itens são evidentes da definição de vizinhança. O item (2) é consequência do fato de τ_X ser fechado por interseção finita. $\square$

Assim como no caso de espaços métricos, podemos caracterizar os conjuntos abertos como sendo aqueles que são vizinhanças de todos os seus pontos.

Proposição 4.8. *Dado um espaço topológico X , um conjunto $A \subset X$ é aberto se, e somente se, for vizinhança de todos os seus pontos.*

Demonstração. Pela definição de vizinhança, um conjunto aberto é evidentemente vizinhança de todos os seus pontos. Suponha então que $A \subset X$ é vizinhança de todos os seus pontos. Vamos mostrar que A é aberto.

Por hipótese, para cada $a \in A$ existe um aberto U_a tal que $a \in U_a \subset A$. Neste caso,

$$A = \bigcup_{a \in A} U_a.$$

Como A é uma união de abertos U_a , temos que A também é aberto. $\square$

Definição 4.9. *Seja (X, τ_X) um espaço topológico e $x \in X$ um ponto qualquer de x . Uma família formada por vizinhanças de x , $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}(x)$, é chamada de base de vizinhanças de x quando para toda vizinhança $V \in \mathcal{V}(x)$ existir $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset V$. Se todos os conjuntos de $\mathcal{B}$ forem abertos, ou seja, se $\mathcal{B} \subset \tau_X$, então diremos que $\mathcal{B}$ é uma base de vizinhanças abertas de x .*

Agora que, mesmo sem uma métrica, definimos o que vem a ser uma vizinhança de um ponto, podemos definir convergência de sequências. As sequências não serão tão importantes para a teoria geral. No entanto, motivarão a definição de *redes*; um conceito que será trabalhado no capítulo ??.

Definição 4.10. *Seja (X, τ_X) um espaço topológico e $x_n \in X$ uma sequência de elementos de X . Dizemos que x_n converge para $x \in X$ na topologia τ_X , quando para toda vizinhança $V \in \mathcal{V}(x)$ existir $N = N(V) \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in V.$$

De maneira semelhante ao caso dos espaços métricos, denotamos tal fato por $x_n \xrightarrow{\tau_X} x$, ou simplesmente $x_n \rightarrow x$.

Novamente, como no caso métrico, para saber se uma sequência $x_n \in x$ converge para $x \in X$, basta verificar a condição da definição 4.10 para uma base de vizinhanças de x . Em particular, assim como no caso dos espaços métricos, dados $x_n, x \in X$, teremos que $x_n \xrightarrow{\tau_X} x$ se, e somente se,

para toda vizinhança aberta A de x existe $N = N(A) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in A.$$

Isso porque a família das vizinhanças abertas de x formam uma base para $\mathcal{V}(x)$.

4.4 Continuidade em um Ponto

A essas alturas, o leitor já sabe o que será tratado neste capítulo. Assim como fizemos para os espaços métricos no capítulo 3.2, vamos falar sobre a continuidade de aplicações entre espaços topológicos. O leitor deve comparar a definição 4.11 e a proposição 3.6, que caracteriza continuidade em um ponto em espaços métricos.

Definição 4.11. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação qualquer entre X e Y . Para $x \in X$, dizemos que f é contínua em x quando*

$$f^{-1}(\mathcal{V}(f(x))) \subset \mathcal{V}(x).$$

Ou seja, quando a imagem inversa de toda vizinhança de $f(x)$ for uma vizinhança de x .

Em uma formulação mais semelhante aos argumentos do estilo $\varepsilon - \delta$, a definição de continuidade fica assim

Para todo $V \in \mathcal{V}(f(x))$ existe $U \in \mathcal{V}(x)$ tal que

$$y \in U \Rightarrow f(y) \in V.$$

Como no caso de espaços métricos, basta verificar a condição da definição para uma base de vizinhanças de x .

Proposição 4.12. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação qualquer. Dados $x \in X$ e $\mathcal{B}$ uma base de vizinhanças de $f(x)$. Então, f é contínua em x se, e somente se,*

$$f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{V}(x).$$

Demonstração. Se $V \in \mathcal{V}(f(x))$, então existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset V$. Portanto, $f^{-1}(V) \supset f^{-1}(B) \in \mathcal{V}(x)$. Assim, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x)$. Como V é um elemento arbitrário de $\mathcal{V}(f(x))$, temos que

$$f^{-1}(\mathcal{V}(f(x))) \subset \mathcal{V}(x).$$

□

4.5 Continuidade

Continuidade é um conceito central em topologia. Uma aplicação contínua transporta aspectos topológicos entre os espaços em questão. Dada uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ entre os conjuntos X e Y , podemos ver f^{-1} como uma aplicação

$$f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X).$$

Se (X, τ_X) e (Y, τ_Y) são espaços topológicos e f é contínua em $x \in X$, podemos olhar para f^{-1} restrita a $\mathcal{V}(f(x))$ como sendo uma aplicação

$$f^{-1} : \mathcal{V}(f(x)) \rightarrow \mathcal{V}(x).$$

A proposição a seguir demonstra que quando f é contínua em todo ponto de X , então a restrição de f^{-1} a τ_Y pode ser vista como uma aplicação

$$f^{-1} : \tau_Y \rightarrow \tau_X.$$

Proposição 4.13. *Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação de X em Y . Neste caso, são equivalentes:*

1. *A função f é contínua em todo ponto $x \in X$.*
2. *Para todo aberto $A \in \tau_Y$, $f^{-1}(A) \in \tau_X$.*

Demonstração. Se f é contínua em todo ponto, então, dado $A \in \tau_Y$, temos que para todo ponto $x \in f^{-1}(A)$, $A \in \mathcal{V}(f(x))$, pois A é aberto e $f(x) \in A$. Pela continuidade de f no ponto x , temos que $f^{-1}(A) \in \mathcal{V}(x)$. Acabamos de mostrar que $f^{-1}(A)$ é vizinhança de todos os seus pontos. Assim, pela proposição 4.8, $f^{-1}(A)$ é um aberto de X . $\square$

Definição 4.14 (Função Contínua). *Dizemos que uma função $f : X \rightarrow Y$ entre os espaços topológicos (X, τ_X) e (Y, τ_Y) é contínua quando é contínua em todo ponto $x \in X$. Ou, equivalentemente, quando $f^{-1}(\tau_Y) \subset \tau_X$.*

Homeomorfismos

Para dois conjuntos X e Y , uma bijeção $f : X \rightarrow Y$ identifica cada ponto de X a um único ponto de Y e vice-versa. Se X e Y forem espaços topológicos, f for contínua e sua inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ também for contínua, então também serão identificados cada aberto de X com um único aberto de Y e vice-versa. Tudo o que puder ser dito sobre a topologia de X poderá ser afirmado sobre a topologia de Y através da identificação dada por f .

Definição 4.15 (Homeomorfismo). *Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que uma aplicação*

$$f : X \rightarrow Y$$

é um homeomorfismo de X em Y quando f for bijetiva, contínua e sua inversa f^{-1} também for contínua.

Quando existe um homeomorfismo entre dois espaços topológicos, dizemos que estes espaços são homeomorfos.

Aplicação Aberta

Com uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ entre espaços topológicos, podemos tentar relacionar as topologias de (X, τ_X) e (Y, τ_Y) . Se f for um homeomorfismo, sabemos que X e Y possuem exatamente a mesma topologia quando os pontos de X são identificados com os de Y através de f . Se f for uma bijeção contínua, podemos identificar cada elemento de X com um único elemento de Y . Com esta identificação, teremos que $\tau_Y \subset \tau_X$. Uma outra propriedade que f pode ter, que ajudaria a relacionar os espaços X e Y é a de levar abertos de X em abertos de Y . Neste caso, dizemos que f é uma *aplicação aberta*.

Definição 4.16. *Seja $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ uma aplicação entre os espaços topológicos X e Y . Dizemos que f é uma aplicação aberta quando $f(\tau_X) \subset \tau_Y$.*

Um homeomorfismo é uma bijeção contínua e aberta. Nossa motivação para a definição de *aplicação aberta* é simplesmente imaginar, ignorando o fato de que f pode nem mesmo ser bijetiva, o que seria necessário para que f^{-1} seja contínua. Mais adiante, veremos maneiras de se transportar topologias de um espaço topológico a um conjunto qualquer através de aplicações entre eles. Quando temos uma bijeção entre um espaço topológico e um conjunto qualquer, fica fácil transportar a topologia de um para o outro. Adiantando um pouco as coisas, imagine que $f : X \rightarrow Y$ é uma sobrejeção aberta e contínua do espaço topológico X no espaço topológico Y . Podemos definir o conjunto

$$\tilde{X} = \{f^{-1}(y) \mid y \in Y\},$$

que nada mais é do que “agrupar” todos os elementos de X que têm a mesma imagem. A projeção natural de X em $\tilde{X}$ é dada por

$$\begin{array}{ccc} \pi : X & \rightarrow & \tilde{X} \\ x & \mapsto & f^{-1}(f(x)) \end{array}.$$

A projeção leva um elemento $x \in X$ na “classe” formada por todos os elementos de X que tem, por f , a mesma imagem que x . A aplicação f pode ser fatorada, de modo que o seguinte diagrama é comutativo (ou seja, $f = \tilde{f} \circ \pi$):

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ \tilde{X} & & \end{array}$$

Basta definir $\tilde{f}(f^{-1}(y)) = y$. Agora, $\tilde{f}$ é uma bijeção. Faria sentido esperar que a topologia de X pudesse ser transportada para $\tilde{X}$, de modo que $\tilde{f}$ se tornasse um homeomorfismo entre Y e $\tilde{X}$. Trataremos desse tipo de topologia no capítulo 7.

Assim como podemos falar em *continuidade em um ponto*, podemos também definir o que seria dizer que $f : X \rightarrow Y$ é aberta em $x \in X$. Assim como no caso de continuidade, a definição fica melhor se usarmos *vizinhanças de x* ao invés de abertos.

Definição 4.17. *Seja $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ uma aplicação entre os espaços topológicos X e Y . Dizemos que f é uma aplicação aberta em $x \in X$ quando $f(\mathcal{V}(x)) \subset \mathcal{V}(f(x))$.*

Construindo Topologias

5.1 Comparando Topologias

Em um mesmo conjunto X , podemos ter definidas duas topologias τ_1 e τ_2 . Pode acontecer que $\tau_1 \subset \tau_2$, por exemplo. Neste caso, sempre que $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ for contínua, teremos que $f : (X, \tau_2) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ também será contínua. Também podemos concluir que

$$x_n \xrightarrow{\tau_2} x \Rightarrow x_n \xrightarrow{\tau_1} x.$$

Pode ser que não tenhamos nem $\tau_1 \subset \tau_2$, nem $\tau_2 \subset \tau_1$. Duas topologias nem sempre são comparáveis.

Definição 5.1. Se (X, τ_X) e (X, τ_X) são duas topologias em um mesmo conjunto X e $\tau_1 \subset \tau_2$, então dizemos que τ_2 é mais forte ou mais fina que τ_1 . Também dizemos que τ_1 é mais fraca que τ_2 .

Podemos também dizer que τ_1 é menor que τ_2 , ou que τ_2 é maior que τ_1 . Veja a observação 5.3.

A topologia determina quais são as sequências que convergem e quais não convergem. Se imaginarmos a topologia como uma “peneira” que deixa passar apenas as sequências convergentes, quanto mais fina for a topologia, menos sequências passarão como convergentes. Veja a figura 5.1.

Proposição 5.2. Seja X um conjunto qualquer, e τ_λ ($\lambda \in \Lambda$) uma família de topologias em X . Então $\tau_X = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda$ é uma topologia em X .

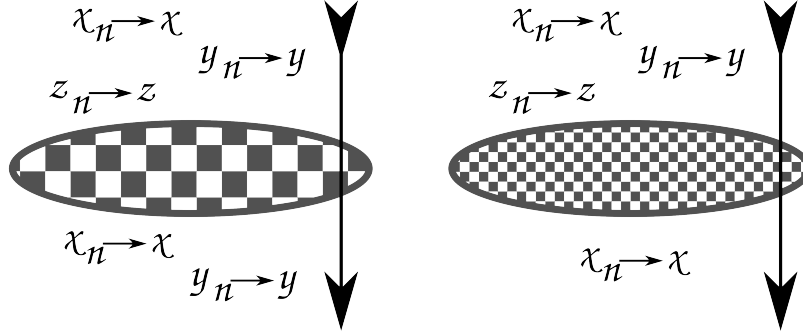


Figura 5.1: Quanto *mais fina* é a topologia, menos sequências “passam” como convergentes.

Demonstração. Basta verificar que τ_X satisfaz os axiomas listados na definição 4.1. Por exemplo,

$$A, B \in \tau_X \Rightarrow \forall \lambda \in \Lambda, A \cap B \in \tau_\lambda \Rightarrow A \cap B \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda = \tau_X.$$

□

Observação 5.3. A relação *mais forte* que define uma *ordem parcial* na família

$$\mathcal{T}(X) = \{\tau_X \subset \mathcal{P}(X) \mid \tau_X \text{ é topologia}\}$$

de todas as topologias de um conjunto X . Esta ordem é simplesmente a restrição da relação de inclusão definida em $\mathcal{P}(X)$ à família $\mathcal{T}(X)$.

Existe um elemento *máximo* dentre todas as topologias de X . É o conjunto das partes de X , $\mathcal{P}(X)$, que é a mais forte topologia que pode ser definida em X . Por outro lado, $\{\emptyset, X\}$ é a topologia mais fraca em $\mathcal{T}(X)$.

A proposição 5.2 mostra que dada uma família de topologias τ_λ ($\lambda \in \Lambda$), existe a *maior topologia que é menor que todas as τ_λ* . Essa topologia δ é o *ínfimo* das τ_λ . Escrevemos

$$\delta = \bigwedge \{\tau_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}.$$

ou

$$\delta = \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda.$$

Por outro lado, a união de topologias não é necessariamente uma topologia. No entanto, se considerarmos a família

$$\mathcal{F} = \left\{ \tau_X \in \mathcal{T}(X) \mid \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda \subset \tau_X \right\}$$

de todas as topologias que são maiores que todas as τ_λ , sabemos que a família $\mathcal{F}$ não é vazia, pois $\mathcal{P}(X) \in \mathcal{F}$. Seja então σ o ínfimo de $\mathcal{F}$:

$$\sigma = \bigwedge \mathcal{F}.$$

A topologia σ é a menor topologia que é maior que todas as τ_λ . Essa topologia é o supremo de τ_λ e é denotada por

$$\sigma = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda.$$

Comparação de Topologias e Continuidade

Quando X é um espaço topológico dotado de duas topologias τ_1 e τ_2 , o que podemos dizer da relação entre essas topologias se soubermos que a aplicação identidade

$$\begin{aligned} \text{id} : (X, \tau_1) &\rightarrow (X, \tau_2) \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

é contínua? A resposta é simples:

$$\text{id é contínua} \Leftrightarrow \tau_2 \subset \tau_1.$$

Vamos generalizar isso para uma aplicação qualquer

$$f : (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2).$$

Proposição 5.4. *Seja X um conjunto qualquer e (Y, τ_Y) um espaço topológico. Dada uma aplicação qualquer $f : X \rightarrow Y$, $\tau_f = f^{-1}(\tau_Y)$ define uma topologia em X .*

Demonstração. Basta notar que $\emptyset, X \in \tau_f$, se $A, B \in \tau_f$, então $A = f^{-1}(A')$ e $B = f^{-1}(B')$ com $A', B' \in \tau_Y$. Como τ_Y é uma topologia, $A' \cap B' \in \tau_Y$. Assim, $A \cap B = f^{-1}(A' \cap B') \in f^{-1}(\tau_Y) = \tau_f$. Podemos fazer analogamente para a união arbitrária de elementos de τ_f . Basta observar que $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ comuta com as operações de união e interseção. $\square$

Pela proposição 5.4, dizer que $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ é contínua é o mesmo que dizer que a topologia τ_f é mais fraca que τ_X . De fato, é fácil verificar que τ_f é a menor topologia que faz com que $f : X \rightarrow (Y, \tau_Y)$ seja contínua.

5.2 Sub-Base

A construção feita na observação 5.3 é muito comum. É essa construção que em álgebra, por exemplo, nos permite definir para um grupo G e um subconjunto qualquer $S \subset G$, o que seria o *grupo gerado por S* . Esse seria o menor subgrupo de G que contém S . Do mesmo modo, para um espaço vetorial V e um subconjunto qualquer $S \subset V$, podemos definir o menor subespaço de V que contenha S . Este é o *sub-espaço vetorial gerado por S* . Existem exemplos também em teoria da medida. Assim, como na proposição 5.2, a interseção de uma família de sub-grupos é um sub-grupo, a interseção de uma família de sub-espaços vetoriais é um sub-espaço vetorial.

Definição 5.5. *Seja X um conjunto, e $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ uma família qualquer de subconjuntos de X . Então a topologia*

$$\tau_X(\mathcal{C}) = \bigvee_{\mathcal{C} \subset \tau_X} \tau_X$$

é a topologia gerada por $\mathcal{C}$. Essa é a menor topologia de X que contém a família $\mathcal{C}$.

Definição 5.6. *Seja X um conjunto qualquer, e $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ uma família qualquer de subconjuntos de X . Mesmo sem definir o que venha a ser uma base para a topologia (definição 5.12), vamos definir o conjunto*

$$\mathcal{B}(\mathcal{C}) = \left\{ \bigcap_{j=1}^n A_j \mid n \in \mathbb{N}, A_j \in \mathcal{C} \right\},$$

e chamá-lo de base induzida pela família $\mathcal{C}$.

Por um abuso de notação, quando $\mathcal{C} = \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, por vezes escrevemos $\tau_X(A_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ no lugar de $\tau_X(\mathcal{C})$. E quando $\mathcal{C}_\lambda, (\lambda \in \Lambda)$ é uma coleção de famílias de subconjuntos de X , escrevemos $\tau_X(\mathcal{C}_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ ao invés de $\tau_X(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_\lambda)$. As seguintes propriedades da topologia gerada por uma família são consequência direta da definição. O leitor deve ficar atento para a diferença entre

$$\tau_X(\mathcal{C}_\lambda, \lambda \in \Lambda)$$

e

$$\tau_X(\mathcal{C}_\lambda), \lambda \in \Lambda.$$

Proposição 5.7. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ famílias de subconjuntos de um conjunto X , e τ_X uma topologia em X . Então, valem as seguintes propriedades:*

1. Todos os conjuntos em $\mathcal{C}$ são abertos na topologia gerada: $\mathcal{C} \subset \tau_X(\mathcal{C})$.
2. Se $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$, então $\tau_X(\mathcal{C}) \subset \tau_X(\mathcal{D})$.
3. Temos que $\mathcal{C} \subset \tau_X$ se, e somente se, $\tau_X(\mathcal{C}) \subset \tau_X$.
4. Se τ_X é uma topologia, então $\tau_X = \tau_X(\tau_X)$. Em particular, vale que

$$\tau_X(\tau_X(\mathcal{C})) = \tau_X(\mathcal{C}).$$

5. Se $\mathcal{C} \subset \tau_X \subset \tau_X(\mathcal{C})$, então $\tau_X = \tau_X(\mathcal{C})$.
6. Se $\mathcal{C} \subset \mathcal{D} \subset \tau_X(\mathcal{C})$, então $\tau_X(\mathcal{C}) = \tau_X(\mathcal{D})$.
7. Se $\mathcal{E} = \tau_X(\mathcal{C}) \cup \tau_X(\mathcal{D})$, então $\tau_X(\mathcal{E}) = \tau_X(\mathcal{C} \cup \mathcal{D})$.
8. Seja $\mathcal{C}_\lambda, (\lambda \in \Lambda)$ uma coleção de famílias de subconjuntos de X .
Então,

$$\tau_X(\tau_X(\mathcal{C}_\lambda), \lambda \in \Lambda) = \tau_X(\mathcal{C}_\lambda, \lambda \in \Lambda).$$

Demonstração. Vamos mostrar apenas o item (8), que é mais difícil. O restante fica como exercício. :-)

É evidente, pelo item (2), que

$$\tau_X\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_\lambda\right) \subset \tau_X\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \tau_X(\mathcal{C}_\lambda)\right).$$

No entanto, novamente pelo item (2), sabemos que para todo $\gamma \in \Lambda$,

$$\tau_X(\mathcal{C}_\gamma) \subset \tau_X\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_\lambda\right).$$

E portanto,

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \tau_X(\mathcal{C}_\lambda) \subset \tau_X\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_\lambda\right)$$

Agora, pelo item 5,

$$\tau_X\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \tau_X(\mathcal{C}_\lambda)\right) \subset \tau_X\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_\lambda\right)$$

□

Forma da Topologia Gerada

Qual é a forma de um aberto de $\tau_X(\mathcal{C})$ quando expresso em termos de $\mathcal{C}$? Obviamente que a topologia gerada por $\mathcal{C}$ deve conter todas as interseções finitas e todas as uniões de elementos de $\mathcal{C}$. Mas isso nem sempre é suficiente. A proposição 5.8 nos diz como podemos escrever os abertos da topologia gerada em termos de conjuntos da sub-base.

Proposição 5.8. *Seja $\mathcal{C}$ uma sub-base para um espaço topológico (X, τ_X) . Ou seja, $\tau_X = \tau_X(\mathcal{C})$. Vamos assumir que $\emptyset, X \in \mathcal{C}$. Considere a base induzida $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{C})$ de todas as interseções finitas de conjuntos de $\mathcal{C}$. Então, todos os conjuntos da topologia são uniões de conjuntos de $\mathcal{B}$:*

$$\tau_X = \left\{ \bigcup_{A \in \mathcal{B}'} A \mid \mathcal{B}' \subset \mathcal{B} \right\}.$$

Demonstração. A topologia $\tau_X(\mathcal{B})$ necessariamente contém $\mathcal{B}$. Assim,

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \subset \tau_X(\mathcal{B}).$$

Considere então, a família τ_X' dada pelas uniões de elementos de $\mathcal{B}$:

$$\tau_X' = \left\{ \bigcup_{A \in \mathcal{B}'} A \mid \mathcal{B}' \subset \mathcal{B} \right\}.$$

Novamente,

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \subset \tau_X' \subset \tau_X(\mathcal{B}).$$

Para concluir que $\tau_X = \tau_X'$, basta mostrar que τ_X' é uma topologia. Assim, como τ_X é a menor que contém $\mathcal{C}$, poderemos concluir que $\tau_X = \tau_X'$. É imediato que

$$\emptyset, X \in \tau_X'.$$

Também é evidente pela própria definição de τ_X' , que τ_X' é fechado por uniões arbitrárias. Basta então verificar que se $A, B \in \tau_X'$, então $A \cap B \in \tau_X'$. Onde,

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{U \in \mathcal{B}_A} U \quad (\mathcal{B}_A \subset \mathcal{B}) \\ B &= \bigcup_{V \in \mathcal{B}_B} V \quad (\mathcal{B}_B \subset \mathcal{B}). \end{aligned}$$

Mas, neste caso,

$$A \cap B = \bigcup_{W \in \mathcal{B}_C} W,$$

onde $\mathcal{B}_C = \{U \cap V \mid U \in \mathcal{B}_A, V \in \mathcal{B}_B\}$. Agora, basta notar que $\mathcal{B}_C \subset \mathcal{B}$, pois $\mathcal{B}$ é fechada por interseção finita. $\square$

Observação 5.9. Nas hipóteses da proposição 5.8, assumimos que $\emptyset, X \in \mathcal{C}$. Essa hipótese não seria necessária se trabalhássemos com a seguinte convenção:

$$\bigcup_{A \in \emptyset} A = \emptyset$$

$$\bigcap_{A \in \emptyset} A = X.$$

Esta convenção se torna mais natural se, considerando a relação de ordem $\subset$ em $\mathcal{P}(X)$, interpretarmos $\cup$ e $\cap$ como sendo operadores de supremo e ínfimo, assim como fizemos na observação 5.3. Desta forma, dado $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$,

$$\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$$

é o menor subconjunto de X que é maior que todos os conjuntos em $\mathcal{F}$. Se $\mathcal{F}$ é vazio, então o menor subconjunto seria justamente $\emptyset$. Da mesma forma,

$$\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$$

é o maior subconjunto de X que é menor que todos os conjuntos em $\mathcal{F}$. Se $\mathcal{F} = \emptyset$, este conjunto é simplesmente o maior subconjunto de X , que é o próprio X .

Sub-Base e Continuidade

Se temos uma aplicação $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$, e uma sub-base $\mathcal{C}$ de τ_Y , como podemos dizer, olhando para $f^{-1}(\mathcal{C})$, se f é ou não contínua. Um primeiro “chute” seria talvez dizer que basta que $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \tau_X$. Obviamente que esta é uma condição necessária. A proposição seguinte é o elo que falta para mostrar que a condição $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \tau_X$ é equivalente à continuidade de f .

Proposição 5.10. *Sejam X e Y dois conjuntos e $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(Y)$ uma família de subconjuntos de Y . Então,*

$$\tau_X(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\tau_Y(\mathcal{C})).$$

Demonstração. Vamos utilizar a seguinte notação:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \tau_X(f^{-1}(\mathcal{C})) \\ \tau_2 &= f^{-1}(\tau_X(\mathcal{C})).\end{aligned}$$

Por definição, τ_1 é uma topologia. É fácil ver (exemplo 4.5) que τ_2 também é uma topologia. Como $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \tau_2$, segue que

$$\tau_1 \subset \tau_2,$$

pois τ_1 é a menor topologia com tal propriedade. Resta então mostrar que dado $A \in \tau_2$, teremos $A \in \tau_1$.

Pela proposição 5.8, dado $A \in \tau_2$, basta mostrar que A pode ser escrito como uma união arbitrária de interseções finitas de elementos de $f^{-1}(\mathcal{C})$. De fato, $A = f^{-1}(A')$, onde $A' \in \tau_X(\mathcal{C})$ é uma união arbitrária de interseções finitas de elementos de $\mathcal{C}$. Como f^{-1} comuta com as operações de união e interseção, temos a expressão desejada para A , concluindo a demonstração. $\square$

Conforme prometido, vamos utilizar a proposição 5.10 para mostrar que para uma aplicação $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ ser contínua, basta que $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \tau_X$.

Proposição 5.11. *Seja $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$, onde $\tau_Y = \tau_X(\mathcal{C})$. Então, f é contínua se, e somente se, $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \tau_X$.*

Demonstração. É evidente que a condição é necessária. Vamos mostrar que é suficiente. Pela proposição 5.10, temos que

$$f^{-1}(\tau_Y) = \tau_X(f^{-1}(\mathcal{C})).$$

Mas a hipótese $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \tau_X$ implica que $\tau_X(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset \tau_X$. Ou seja,

$$f^{-1}(\tau_Y) = \tau_X(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset \tau_X.$$

$\square$

5.3 Bases

Dada uma família $\mathcal{C}$ de subconjuntos de um conjunto X , a base induzida $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{C})$ tinha uma propriedade interessante:

Todo aberto de $\tau_X(\mathcal{B})$ é uma união de elementos de $\mathcal{B}$.

Cada família com essa propriedade é uma de *base da topologia*. Quando construímos a topologia dos espaços métricos, as *bolas* formavam uma base para a topologia. (proposição 3.14)

Definição 5.12. *Seja (X, τ_X) um espaço topológico. Uma família $\mathcal{B} \subset \tau_X$ é uma base para a topologia τ_X quando todo conjunto $A \in \tau_X$ puder ser escrito como uma união de elementos de $\mathcal{B}$.*

Como de costume, vamos ver outras maneiras de caracterizar o que vem a ser uma base para uma topologia τ_X . Note que uma das condições da definição 5.12 é que $\mathcal{B} \subset \tau_X$.

Proposição 5.13. *Seja (X, τ_X) um espaço topológico e $\mathcal{B} \subset \tau_X$ uma família de abertos de X . Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. A família

$$\rho = \left\{ \bigcup B \in \mathcal{B}' A \mid \mathcal{B}' \subset \mathcal{B} \right\},$$

onde seguimos a convenção de que $\bigcup A \in \emptyset A = \emptyset$, é uma topologia de X . E além disso, $\tau_X = \tau_X(\mathcal{B})$.

2. A família $\mathcal{B}$ é uma base para τ_X .

3. Para todo $x \in X$ e toda vizinhança aberta de x , A , existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset A$.

4. Para todo $x \in X$, o conjunto

$$\mathcal{B}_x = \{A \in \mathcal{B} \mid x \in A\}$$

é uma base de vizinhanças de x . (veja a definição 4.9)

5. Para todo $A, B \in \mathcal{B}$ e $x \in A \cap B$ existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $x \in C \subset A \cap B$. E além disso, $\tau_X = \tau_X(\mathcal{B})$ e $X = \bigcup_{A \in \mathcal{B}} A$.

Demonstração. ■ (1) $\Rightarrow$ (2)

Pela definição de base, $\mathcal{B}$ é uma base para ρ . Como

$$\mathcal{B} \subset \rho \subset \tau_X(\mathcal{B}),$$

temos que $\rho = \tau_X(\mathcal{B}) = \tau_X$.

■ (2) $\Rightarrow$ (3)

Sejam $A \in \tau_X$ e $x \in A$. Como o conjunto A é da forma

$$A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$$

para alguma sub-família $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, basta escolher $B \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B$.

■ (3) $\Rightarrow$ (4)

Evidentemente que $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{V}(x)$, já que a família é formada por conjuntos abertos que contém x . Basta (por quê?) mostrar que para toda vizinhança aberta de x existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subset A$. Mas a existência de tal B é justamente a hipótese do item (3).

■ (4) $\Rightarrow$ (5)

Se $A, B \in \mathcal{B}$ e $x \in A \cap B$, então, por hipótese, A e B são vizinhanças de x . Portanto, $A \cap B$ também é vizinhança de x . Como $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças de x , então existe $C \in \mathcal{B}_x$ tal que

$$x \in C \subset A \cap B.$$

Precisamos então verificar que $\mathcal{B}$ gera τ_X . Primeiramente, note que todo conjunto $U \in \mathcal{B}$ é aberto, pois se $x \in U$, então $U \in \mathcal{B} \subset \mathcal{V}(x)$. Ou seja, U é vizinhança de todos os seus pontos. Assim,

$$\tau_X(\mathcal{B}) \subset \tau_X.$$

Por outro lado, todo aberto de τ_X pode ser escrito como uma união de elementos de $\mathcal{B}$, pois dado $V \in \tau_X$, para cada $x \in V$ existe $V_x \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in V_x \subset V$. Ou seja,

$$V = \bigcup_{x \in V} V_x.$$

E portanto,

$$\tau_X \subset \tau_X(\mathcal{B}).$$

É evidente que $X = \bigcup_{A \in \mathcal{B}} A$, pois nenhum dos $\mathcal{B}_x$ é vazio. (Note que acabamos provando que (4) $\Rightarrow$ (2))

■ (5) $\Rightarrow$ (1)

Já sabemos que $\emptyset \in \rho$. Pela hipótese de X ser a união de todos os conjuntos em $\mathcal{B}$, $X \in \rho$. Por definição, ρ é evidentemente fechada por união

arbitrária. Resta mostrar que é também fechada por interseção finita. Para isso, basta notar que A e B são da forma

$$A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

$$B = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma$$

para alguma família $A_\lambda, B_\gamma \in \mathcal{B}$. Assim,

$$A \cap B = \bigcup_{(\lambda, \gamma) \in \Lambda \times \Gamma} A_\lambda \cap B_\gamma,$$

sendo que, é fácil verificar que as hipóteses do item (5) implicam que cada $A_\lambda \cap B_\gamma$ é uma união de conjuntos em $\mathcal{B}$. Portanto, $A \cap B \in \rho$. $\square$

Observação 5.14. Dada uma família qualquer $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$, a proposição 5.8 mostra que $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ é uma base para $\tau_X(\mathcal{C})$. Em particular, toda família $\mathcal{B}$ fechada por interseção finita é uma base para $\tau_X(\mathcal{B})$. Esse fato pode ser verificado também pelo item (5) da proposição 5.13. Esta condição não é, no entanto, necessária para que $\mathcal{B}$ seja uma base para $\tau_X(\mathcal{B})$. As bolas, por exemplo, formam uma base para a topologia de um espaço métrico, mas não é necessariamente verdade que a interseção de duas bolas será uma bola.

Corolário 5.15. *Seja $\mathcal{B}$ uma família de subconjuntos de X . Para que $\mathcal{B}$ seja uma base de $\tau_X(\mathcal{B})$ é necessário e suficiente que para todo $A, B \in \mathcal{B}$, $A \cap B$ possa ser escrito como união de elementos de $\mathcal{B}$.*

Demonstração. Basta verificar as condições do item (5) da proposição 5.13. Evidentemente que $\mathcal{B}$ gera $\tau_X(\mathcal{B})$. O restante da demonstração fica como exercício. $\square$

Fecho e Interior

Dado um subconjunto $B \subset X$ de um espaço topológico X , vamos associar a B o conjunto $\overline{B}$ dado por todos os pontos que estão “próximos” de B . Veremos que a propriedade do item (3) da proposição 4.7 garantirá que se $F = \overline{B}$, então $F = \overline{F}$. Ou seja, apesar de termos acrescentado pontos em B para construir o conjunto F , mesmo com esse alargamento, F não se tornou “próximo” de nenhum ponto do qual B já não fosse próximo. O conjunto $\overline{B}$ é o *fecho de B* . E os conjuntos F que satisfazem $F = \overline{F}$ são chamados de *conjuntos fechados*. Veremos que os conjuntos fechados são exatamente os complementares dos conjuntos abertos.

6.1 Fecho e Fechado

Definição 6.1. *Seja (X, τ_X) um espaço topológico e $B \subset X$ um subconjunto qualquer de X . Definimos o fecho de B , e denotamos por $\overline{B}$ o conjunto*

$$\overline{B} = \{x \in X \mid \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap B \neq \emptyset\}.$$

Também escrevemos $\text{cl}(B)$; ou quando queremos enfatizar a topologia τ_X , escrevemos $\text{cl}_{\tau_X}(B)$.

Observação 6.2. O operador de fecho é uma aplicação

$$\begin{aligned} \text{cl} : \mathcal{P}(X) &\rightarrow \mathcal{P}(X) \\ B &\mapsto \overline{B} \end{aligned}.$$

Lema 6.3. *Seja (X, τ_X) um espaço topológico. E para cada x , seja $\beta_x \subset \mathcal{V}(x)$ uma base de vizinhanças de x . Então,*

$$\overline{B} = \{x \in X \mid \forall V \in \beta_x, V \cap B \neq \emptyset\}.$$

Em particular, x está no fecho de B se, e somente se, para toda vizinhança aberta U de x , $U \cap B \neq \emptyset$.

Vamos então verificar algumas propriedades do operador cl_{τ_X} .

Proposição 6.4. *A operação de fecho no espaço topológico (X, τ_X) satisfaz:*

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset, \overline{X} = X$.
2. $B \subset \overline{B}$.
3. $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
4. $\overline{\overline{B}} = \overline{B}$. ($\text{cl}_{\tau_X}^2 = \text{cl}_{\tau_X}$)
5. Se B_λ ($\lambda \in \Lambda$) é uma família qualquer de subconjuntos de X , então

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \overline{B_\lambda} \subset \overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda}.$$

6. Se A, B são subconjuntos de X , então

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Demonstração. ■ Itens (1), (2) e (3).

Consequências imediatas da definição de fecho.

■ Item (4).

Por (2), $\overline{B} \subset \overline{\overline{B}}$. Seja então $x \in \overline{\overline{B}}$, e seja $U \in \tau_X$ uma vizinhança aberta de x . Então existe $y \in \overline{B}$, tal que $y \in U$. Ou seja, U é vizinhança de y . E portanto, como y está no fecho de B , existe $z \in B$ tal que $z \in U$. Provamos que toda vizinhança aberta de x intercepta B . Pelo lema 6.3, $x \in \overline{B}$.

■ Item (5).

O item (5) é imediato da definição de fecho. No entanto, também pode ser demonstrado através do item (3), pois para todo $\gamma \in \Lambda$,

$$B_\gamma \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \Rightarrow \overline{B_\gamma} \subset \overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda}.$$

Basta então fazer a união para todo $\gamma \in \Lambda$.

■ Item (6).

Por (5), basta mostrar que

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Suponha que $x \in \overline{A \cup B}$, mas $x \notin \overline{A}$. Vamos mostrar que $x \in \overline{B}$. Existe uma vizinhança V de x tal que $V \cap A = \emptyset$. Toda vizinhança de x intercepta $A \cap B$. Então, toda vizinhança de x contida em V , já que não intercepta A , tem que interceptar B . Observando que a família de todas as vizinhanças de x contidas em V forma uma base de vizinhanças de x (por quê?), concluímos pelo lema 6.3 que $x \in \overline{B}$. $\square$

Observação 6.5. A demonstração do item 4 da proposição 6.4 (de fato, o lema 6.3 utilizou, de maneira essencial, o fato de a família das vizinhanças abertas de um ponto formar uma base de vizinhanças. Veja a observação 3.5, o texto introdutório da seção 3.5 e a figura 4.2.

Definição 6.6. Dado um espaço topológico (X, τ_X) , um conjunto $F \subset X$ é fechado quando $\overline{F} = F$.

Pela definição de fechado, os conjuntos fechados são os pontos fixos da aplicação cl_{τ_X} . Por outro lado, o item 4 da proposição 6.4 mostra que todo conjunto da forma $\overline{B}$ é fechado. Ou seja, a família dos conjuntos fechados é exatamente a imagem de cl_{τ_X} . Se o “fecho” de um conjunto não fosse “fechado”, precisaríamos dar outro nome para ao menos um dos dois conceitos. :-)

Proposição 6.7. Em um espaço topológico (X, τ_X) , $F \subset X$ é fechado se, e somente se, $F^c \in \tau_X$.

Demonstração. Tome $x \in F^c$. Então existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tal que $V \cap F = \emptyset$. Ou seja, $V \subset F^c$. Portanto, F^c é aberto, já que é vizinhança de todos os seus pontos.

Por outro lado, suponha que $F^c \in \tau_X$. Então, nenhum ponto de F^c pertence a $\overline{F}$ (por quê?). Ou seja,

$$\overline{F} \subset F.$$

Portanto, $\overline{F} = F$ (por quê?). $\square$

Observação 6.8. A proposição 6.7 mostra que a topologia de X pode ser determinada pela família

$$\mathcal{F} = \{F \subset X \mid \overline{F} = F\},$$

dos subconjuntos fechados de X . Quando é então que uma família $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ define os conjuntos fechados de uma topologia τ_X ? Ou seja, quando é que a família

$$\tau_{\mathcal{F}} = \{A \subset X \mid A^c \in \mathcal{F}\}$$

é uma topologia de X ? A resposta é simples: a família $\mathcal{F}$ terá que satisfazer as condições listadas na proposição 6.9.

Indo um pouco além, se conhecermos cl_{τ_X} , também sabemos quem são os fechados de τ_X , e por consequência, sabemos quem é a topologia τ_X . Desta forma, quando é então que uma aplicação

$$c : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$$

é igual à operação de fecho cl_{τ_X} de uma topologia τ_X ? A resposta a esta pergunta está contida na proposição 6.4. Veja o exercício ??.

Proposição 6.9. *Dado um espaço topológico (X, τ_X) , a família $\mathcal{F}$ formada pelos subconjuntos fechados de X satisfaz:*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{F}$.
2. $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$.
3. $F_\lambda \in \mathcal{F} (\lambda \in \Lambda) \Rightarrow \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}$.

Demonstração. Basta utilizar as leis de De Morgan

$$\begin{aligned} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c &= \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)^c \\ \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c &= \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)^c \end{aligned}$$

para verificar a equivalência entre os itens da proposição e os itens da definição de topologia 4.1. $\square$

O fecho de um conjunto B pode ser facilmente determinado se utilizarmos a família $\mathcal{F}$ dos fechados.

Proposição 6.10. *Seja X um espaço topológico e $\mathcal{F}$ a família formada pelos subconjuntos fechados de X . Então, para um subconjunto qualquer $B \subset X$,*

$$\overline{B} = \bigcap_{\substack{B \subset F \\ F \text{ é fechado}}} F.$$

Em outras palavras, $\overline{B}$ é o menor conjunto fechado que contém B .

Demonstração. Como $\overline{B}$ é fechado e $B \subset \overline{B}$, temos que

$$\bigcap_{B \subset F \in \mathcal{F}} F \subset \overline{B}.$$

Afirmção. *Se F é fechado, então*

$$B \subset F \Rightarrow \overline{B} \subset F.$$

De fato,

$$B \subset F \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{F} = F.$$

Pela afirmação anterior, é evidente que

$$\overline{B} \subset \bigcap_{B \subset F \in \mathcal{F}} F.$$

□

6.2 Interior

Assim como para o fecho, dado um espaço topológico $(X, \tau X)$, podemos associar a cada $B \subset X$ o subconjunto de B formado por todos os pontos dos quais B é vizinhança. Do mesmo modo que o fecho de um conjunto é fechado, o interior será aberto. E assim como o fecho de B é o menor fechado que contém B , seu interior é o maior aberto contido em B .

Proposição 6.11. *Seja $(X, \tau X)$ um espaço topológico e $B \subset X$ um subconjunto qualquer de X . Então existe um conjunto $A \subset B$ que é o maior subconjunto de B que é aberto. O conjunto A também pode ser escrito*

$$A = \{x \in B \mid B \in \mathcal{V}(x)\}.$$

Demonstração. Como a união arbitrária de abertos é um aberto, então

$$A' = \bigcup_{\substack{U \in \tau_X \\ U \subset B}} U$$

é evidentemente o maior aberto contido em B . Vamos mostrar que $A = A'$.

O conjunto A' é tal que se $x \in A'$, então $A' \in \mathcal{V}(x)$. Como $A' \subset B$, então para todo ponto de $x \in A'$, temos que B é uma vizinhança de x . Ou seja,

$$A' \subset A.$$

Falta então mostrar que o conjunto A é aberto e que portanto,

$$A \subset A'.$$

Seja $x \in A$. Como B é vizinhança de x , então existe uma vizinhança aberta de x , U_x , tal que $x \in U_x \subset B$. O conjunto U_x é vizinhança de todos os seus pontos. Em particular, B é vizinhança de todos os pontos de U_x . Ou seja,

$$U_x \subset A.$$

E portanto,

$$A = \bigcup_{x \in A} U_x$$

é aberto. □

É importante notar quando se afirma a “existência” de um elemento “máximo”. Ao contrário do que nossa intuição possa acreditar, nem sempre existe um elemento “máximo” ou “maximal” que satisfaça determinada condição. Por exemplo, não existe o “maior número real que é menor que 1.” Talvez o leitor não tenha percebido, mas se o conjunto $\emptyset$ não fosse aberto, a demonstração anterior não estaria correta. Em que momento utilizamos que $\emptyset$ é um conjunto aberto?

Definição 6.12. *Seja (X, τ_X) um espaço topológico e $B \subset X$ um subconjunto qualquer de X . O interior de B é maior conjunto aberto contido em B . Denotamos o interior de B por $\overset{\circ}{B}$, $\text{int}(B)$, ou ainda $\text{int}_{\tau_X}(B)$ quando queremos enfatizar que é o interior de B com respeito à topologia τ_X .*

Proposição 6.13. *Seja X um espaço topológico. Valem as seguintes relações entre o fecho e o interior de um conjunto $B \subset X$:*

$$\begin{aligned} \text{cl}(B^c) &= \text{int}(B)^c \\ \text{cl}(B)^c &= \text{int}(B^c). \end{aligned}$$

Demonstração. Exercício. :-)

□

6.3 Continuidade

Os conjuntos fechados são simplesmente complementos de conjuntos abertos. Dada uma aplicação $f : X \rightarrow Y$, a inversa f^{-1} preserva a operação de complemento. Assim, f será contínua quando a imagem inversa de cada fechado for um conjunto fechado.

Proposição 6.14. *Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação qualquer. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *A aplicação f é contínua: para todo aberto $A \subset Y$, $f^{-1}(A)$ é um aberto de X .*
2. *Para todo fechado $F \subset Y$, $f^{-1}(F)$ é um fechado de X .*
3. *Para todo conjunto $B \subset X$,*

$$f(\overline{B}) \subset \overline{f(B)}.$$

4. *Para todo conjunto $B \subset X$,*

$$\text{int}(f(B)) \subset f(\text{int}(B)).$$

Demonstração. ■ $1 \Leftrightarrow 2$

Basta notar que $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ preserva a operação de complemento. Isto é,

$$f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c.$$

■ $2 \Rightarrow 3$

Por hipótese, o conjunto $f^{-1}(\overline{f(B)})$ é fechado e contém B . Portanto, como o fecho de B é o menor fechado que o contém, segue que

$$\overline{B} \subset f^{-1}(\overline{f(B)})$$

Basta agora aplicar f a ambos os lados para obter

$$f(\overline{B}) \subset \overline{f(B)}.$$

■ $3 \Leftrightarrow 4$

Segue da relação entre o fecho e o interior descrito na proposição 6.13.

■ $3 \Rightarrow 2$

Seja $F \subset Y$ um conjunto fechado. Faça

$$B = f^{-1}(F).$$

Vamos mostrar que B é fechado. Pela hipótese do item 3, vale que

$$f(\overline{B}) \subset \overline{f(B)} \subset \overline{F} = F.$$

Aplicando f^{-1} de ambos os lados,

$$\overline{B} \subset f^{-1}(F) = B.$$

Portanto, $\overline{B} = B$. □

Aplicação Fechada

Assim como fizemos quando definimos o que vem a ser uma aplicação aberta (definição 4.16), vamos definir o que é uma aplicação fechada.

Definição 6.15. *Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ entre dois espaços topológicos é fechada, quando para todo fechado $F \subset X$, sua imagem $f(F) \subset Y$ também for fechada.*

Note que enquanto é verdade que se f^{-1} leva abertos em abertos (ou seja, f é contínua), então f^{-1} leva fechados em fechados; não é verdade que se f é uma aplicação aberta, também será uma aplicação fechada. Por exemplo,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 0 \end{aligned}$$

é uma aplicação fechada, mas não é aberta.

6.4 Convergência

Em um espaço topológico X , se $F \subset X$ é fechado, e $x \notin F$, então nenhuma sequência $x_n \in F$ pode convergir para x . De fato, F^c é uma vizinhança de x que não contém nenhum ponto da sequência x_n . Portanto, se uma

sequência $x_n \in F$ converge para x , teremos que $x \in F$. Em particular, esquecendo um pouco o conjunto F , se $x_n \rightarrow x$, então,

$$x \in \overline{\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}}.$$

Indo um pouco além,

$$x \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n \mid n \geq N\}}.$$

Pois a sequência x_{N+n} também converge para x .

Por outro lado, dada a sequência $x_n \in X$, suponha que

$$x \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n \mid n \geq N\}}.$$

Podemos concluir que $x_n \rightarrow x$? A resposta é não! Mas por que não? Por exemplo, por que $x_n = (-1)^n$ não converge? E se

$$\{x\} = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n \mid n \geq N\}},$$

então vale que $x_n \rightarrow x$? Considere

$$x_n = \begin{cases} 0, & n \text{ é ímpar} \\ n, & n \text{ é par} \end{cases}$$

para verificar que não vale. Mas é verdade que se $x_n \rightarrow x$, então

$$\{x\} = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n \mid n \geq N\}}?$$

Para ver que não, basta considerar a topologia $\{\emptyset, X\}$, onde X é um conjunto qualquer com mais de um elemento. Neste caso,

$$X = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n \mid n \geq N\}},$$

pois o fecho de qualquer conjunto não vazio é igual a X .

Vamos supor, então, que

$$x \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n \mid n \geq N\}}.$$

Neste caso, quando é que $x_n \not\rightarrow x$? Se

$$x_n \not\rightarrow x,$$

então existe uma vizinhança de x , V , tal que infinitos $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots$ não pertencem a V . Ou seja,

$$x \notin \overline{\{x_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}}.$$

É como dizer que $x_n \rightarrow x$ quando para toda “subsequência” x_{n_k} tivermos que $x_{n_k} \rightarrow x$.

Definição 6.16. *Dado um conjunto X e uma sequência $x_n \in X$. Uma sub-sequência de x_n é simplesmente uma sequência $y_k = x_{n_k}$, onde $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$.*

Observação 6.17. Dada uma sequência $x_n \in X$, o que determina as subsequências de x_n , são as aplicações

$$\begin{array}{ccc} f: & \mathbb{N} & \rightarrow \mathbb{N} \\ & k & \mapsto n_k \end{array}$$

que preservam a ordem $\leq$ de $\mathbb{N}$. Ou seja,

$$k_1 \leq k_2 \Leftrightarrow n_{k_1} \leq n_{k_2}.$$

Poderíamos ter definido *subsequência* como uma aplicação $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que satisfaz

$$k_1 < k_2 \Rightarrow f(k_1) < f(k_2).$$

Proposição 6.18. *Dado um espaço topológico X , uma sequência $x_n \in X$ converge para $x \in X$ se, e somente se, para toda subsequência x_{n_k} ,*

$$x \in \overline{\{x_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}}.$$

Demonstração. Se $x_n \rightarrow x$, então toda subsequência x_{n_k} converge para x (por quê?). Portanto,

$$x \in \overline{\{x_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}}.$$

Pois se $x \notin \overline{\{x_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}}$, então $\overline{\{x_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}}^c$ é uma vizinhança de x que não contém nenhum x_{n_k} .

Por outro lado, se $x_n \not\rightarrow x$, então existe uma vizinhança V de x , tal que para infinitos índices $n_1, n_2, n_3, \dots$, $x_{n_k} \notin V$. Portanto, para esses índices,

$$x \notin \overline{\{x_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}}.$$

□

Uma das implicações da proposição 6.18, é que basta conhecer o fecho dos conjuntos enumeráveis para sabermos quais são e quais não são as sequências convergentes. Em espaços métricos, por exemplo, os conjuntos fechados F , são exatamente aqueles que

$$x_n \in F, x_n \rightarrow x \Rightarrow x \in F.$$

Em espaços topológicos em geral, isso não é necessariamente válido. Mais adiante, veremos como o conceito de “redes” pode remediar esta deficiência das sequências. Por exemplo, considere a topologia em $\mathbb{R}$ do exercício ??, onde os fechados são, além do próprio $\mathbb{R}$, os conjuntos enumeráveis (com cardinalidade menor ou igual à de $\mathbb{N}$). Neste caso, as sequências convergentes são constantes a menos de um número finito de índices:

$$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n = x. \quad (6.1)$$

De fato, se houvessem infinitos índices n_k tais que $x_{n_k} \neq x$, então, $\{x_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ seria um fechado que não contém x , contradizendo a proposição 6.18. Por outro lado, as sequências de (6.1), são exatamente as sequências convergentes na topologia discreta.

Essa mesma construção poderia ser feita com qualquer conjunto X no lugar de $\mathbb{R}$, para se ter uma topologia em X onde as sequências convergentes são as mesmas da topologia discreta. Precisamos que X seja não enumerável para que a topologia construída seja diferente de topologia discreta $\mathcal{P}(X)$.

Em espaços métricos, uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ era contínua quando

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x). \quad (6.2)$$

Para o caso de espaços topológicos, a continuidade de f implica na condição da equação (6.2). No entanto, a volta nem sempre vale.

Proposição 6.19. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação entre espaços topológicos, contínua no ponto $x \in X$. Então,*

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x).$$

Demonstração. Se $f(x_n) \not\rightarrow f(x)$, então existe uma vizinhança aberta A de $f(x)$, tal que para um número infinito de índices, a sequência $f(x_n)$ não pertence a A . Portanto, para um número infinito de índices, a sequência x_n não pertence a $f^{-1}(A)$, que é, pela continuidade de f em x , uma vizinhança de x . O que mostra que $x_n \not\rightarrow x$. $\square$

Topologias Derivadas de Outras Topologias

7.1 Topologia de um Sub-Espaço

Se temos um espaço topológico (X, τ_X) e um subconjunto $Z \subset X$, então é natural pensarmos na restrição da topologia τ_X ao subconjunto Z . É natural, mesmo? Vamos fazer algumas considerações.

Imagine que $x_n \in Z$ é uma subsequência que na topologia τ_X , converge para $x \in Z$. Neste caso, se fôssemos “induzir” em Z uma topologia τ_Z a partir de τ_X , tal topologia deveria ser tal que para $x_n, x \in Z$,

$$x_n \xrightarrow{\tau_X} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\tau_Z} x.$$

Pensando em termos da operação de fecho, por exemplo, para um conjunto $B \subset Z$, o conjunto dos pontos de Z que estão “próximos” — ou seja, no fecho — de B são, intuitivamente, os pontos de Z que estão em $\text{cl}_{\tau_X}(B)$. Ou seja, deveríamos ter que

$$\text{cl}_{\tau_Z}(B) = \text{cl}_{\tau_X}(B) \cap Z.$$

Vendo do ponto de vista da continuidade, se $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ é uma aplicação qualquer, e $W \subset Y$ é tal que $f(X) \subset W$, então podemos pensar na aplicação

$$\begin{aligned} \bar{f} : X &\rightarrow W, \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

e esperar que possamos induzir em W uma topologia tal que f é contínua se, e somente se, $\bar{f}$ o for. Poderíamos também, dado $Z \subset X$, pensar na

continuidade de $f|_Z$. Claro que esperaríamos que $f|_Z$ será contínua em $z \in Z$ se, e somente se, f o for. Dentre essas considerações, o menos natural seria pensar em termos de abertos. E é por isso que este livro é “de vários ângulos”. :-)

Entretanto, como nossa definição de espaço topológico é em termos de abertos, com as ferramentas que temos até o momento, será mais fácil definir a topologia de um subconjunto em termos de abertos.

Definição 7.1 (Topologia Induzida em um Subconjunto). *Seja (X, τ_X) um espaço topológico e $Z \subset X$ um subconjunto de X qualquer. Então, o conjunto*

$$\tau_X \cap Z = \{A \cap Z \mid A \in \tau_X\}$$

é a topologia induzida sobre Z .

Notação. Na definição 7.1, a notação $\tau_X \cap Z$ não é a interseção de τ_X e Z , mas a família formada pela interseção dos elementos de τ_X com o conjunto Z . Este abuso de notação, em geral, não deve causar problemas de entendimento e será usado sem ressalvas.

Vamos então verificar que a definição de topologia induzida em um subconjunto satisfaz as propriedades discutidas no início do capítulo.

Proposição 7.2. *Seja (X, τ_X) um espaço topológico e $Z \subset X$ um subconjunto de X qualquer. Então a topologia induzida em Z , $\tau_Z = \tau_X \cap Z$ satisfaz:*

1. *Todo aberto $A \in \tau_Z$ da topologia induzida é da forma $A = A' \cap Z$ para algum aberto $A' \in \tau_X$ da topologia de X .*
2. *Todo fechado $F \in \tau_Z$ da topologia induzida é da forma $F = F' \cap Z$ para algum fechado $F' \in \tau_X$ da topologia de X .*
3. *Se $B \subset Z$, então*

$$\text{cl}_{\tau_Z}(B) = \text{cl}_{\tau_X}(B) \cap Z.$$

4. *Se $x_n, x \in Z$, então $x_n \xrightarrow{\tau_X} x$ se, e somente se, $x_n \xrightarrow{\tau_Z} x$.*
5. *Se (Y, τ_Y) é um espaço topológico qualquer e $f : (Y, \tau_Y) \rightarrow (X, \tau_X)$ é uma aplicação contínua tal que $f(Y) \subset Z$, então*

$$\begin{aligned} \bar{f} : (Y, \tau_Y) &\rightarrow (Z, \tau_Z) \\ y &\mapsto f(y) \end{aligned}$$

é contínua. (Note que a diferença entre as aplicações f e $\bar{f}$ é apenas o contra-domínio das aplicações)

6. Se (Y, τ_Y) é um espaço topológico qualquer e $g : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ é uma aplicação contínua, então

$$\begin{aligned} g|_Z : (Z, \tau_Z) &\rightarrow (Y, \tau_Y) \\ z &\mapsto g(z) \end{aligned}$$

é contínua.

Demonstração. ■ Itens (1) e (2).

Imediato da definição de τ_Z .

■ Item (3).

Este fato pode ser demonstrado de várias formas — de vários ângulos ;-). Vamos utilizar a proposição 6.10, mas o leitor é motivado a demonstrar diretamente da definição de fecho (definição 6.1).

Pela proposição 6.10,

$$\text{cl}_{\tau_Z}(B) = \bigcap_{\substack{F: \text{ fechado de } X \\ B \subset F \cap Z}} (F \cap Z) = \left(\bigcap_{\substack{F: \text{ fechado de } X \\ B \subset F}} F \right) \cap Z = \text{cl}_{\tau_X}(B) \cap Z.$$

(em que lugar da equação foi utilizado que $B \subset Z$?)

■ Item (4).

Exercício.

■ Item (5)

Basta notar que $f^{-1}(A \cap Z) = f^{-1}(A)$.

■ Item (6)

Exercício. □

Observação 7.3. Para uma aplicação $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ e um subconjunto $Z \subset X$, sempre que falarmos de propriedades topológicas de $f|_Z$ estaremos nos referindo à topologia $\tau_X \cap Z$. De modo mais geral, a menos que se diga o contrário, consideraremos Z dotado da topologia $\tau_X \cap Z$.

Observação 7.4. Note que se Z é um aberto, então

$$\tau_X \cap Z = \{A \in \tau_X \mid A \subset Z\}.$$

Em particular, os abertos da topologia induzida são também abertos na topologia original. Isso não vale em geral.

Da mesma forma, se Z for fechado, os fechados da topologia induzida serão exatamente os fechados da topologia original que estejam contidos em Z . (demonstre!)

Exemplo 7.5 (Topologia Induzida: $[0, 1) \subset \mathbb{R}$). Considere a topologia induzida em no intervalo $[0, 1)$ induzida pela topologia usual dos números reais. Então, por exemplo, a família

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ \left[0, \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

é uma base de vizinhanças abertas para o ponto 0.

Exemplo 7.6 (Espaço Métrico). Em um espaço métrico (X, d) , temos a topologia τ_d , em X , induzida pela métrica d . Se $Z \subset X$ é um subconjunto qualquer de X , então, a princípio, temos duas maneiras canônicas de induzir uma topologia em Z . Temos $\tau_d \cap Z$, e temos também a topologia τ_{d_Z} induzida pela restrição da métrica ao conjunto Z :

$$\begin{aligned} d_Z : Z \times Z &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (z_1, z_2) &\mapsto d(z_1, z_2) \end{aligned}.$$

Essas duas topologias coincidem. (por quê? dica: o que são as bolas na métrica induzida?)

União Disjunta

Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos disjuntos. Então, $(X \cup Y, \tau_{X \cup Y})$ é um espaço topológico onde X e Y são abertos e fechados, e possuem a topologia induzida pela união. Ou seja, fazendo $W = X \cup Y$ e $\tau_W = \tau_X \cup \tau_Y$, temos que

$$\tau_X = \tau_W \cap X \quad \text{e} \quad \tau_Y = \tau_W \cap Y.$$

No capítulo ??, estudaremos a existência de conjuntos que são fechados e abertos ao mesmo tempo. Se em um espaço topológico (W, τ_W) existe um subconjunto próprio não vazio, $X \subset W$, que é aberto e fechado ao mesmo tempo, então seu complemento, $Y = X^c$ também é aberto e fechado. Neste caso,

$$\tau_W = (\tau_W \cap X) \cup (\tau_W \cap Y).$$

Por isso, dizemos que (W, τ_W) é desconexo (definição ??).

7.2 Topologias Inicial e Final

Se temos uma aplicação $f : X \rightarrow (Y, \tau_Y)$ de um conjunto X qualquer em um espaço topológico, a proposição 5.10 mostra que $f^{-1}(\tau_Y)$ é uma topologia em X . Não apenas isto, mas é também a *menor* topologia que torna f contínua. De fato, $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ é contínua quando $f^{-1}(\tau_Y) \subset \tau_X$. Mesmo quando estivermos tratando de uma família de aplicações

$$f_\lambda : X \rightarrow (Y_\lambda, \tau_\lambda),$$

podemos falar da topologia mais fraca em X que torna *todas* as f_λ contínuas.

Definição 7.7. *Dada uma família de aplicações*

$$f_\lambda : X \rightarrow (Y_\lambda, \tau_\lambda) \ (\lambda \in \Lambda),$$

a topologia $\tau_X(f^{-1}(\tau_\lambda), \lambda \in \Lambda)$ — a menor topologia tal que todas as aplicações f_λ são contínuas — é chamada de topologia inicial induzida pela família f_λ . Quando a família é composta por apenas uma aplicação f , é denotada por τ_f .

Por outro lado, dada uma aplicação $f : (X, \tau_X) \rightarrow Y$ de um espaço topológico em um conjunto Y qualquer, podemos nos perguntar qual seria a maior topologia que pode ser colocada em Y de modo que f seja contínua. O leitor deve se convencer de que a exigência “maior topologia tal que f seja contínua” faz sentido. Afinal, se $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ é contínua, então será contínua se a topologia de τ_Y for substituída por uma topologia mais fraca qualquer.

Definição 7.8. *Dada uma família de aplicações*

$$f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \rightarrow Y \ (\lambda \in \Lambda),$$

a maior topologia tal que todas as aplicações f_λ são contínuas — é chamada de topologia final induzida pela família f_λ . Quando a família é composta por uma única aplicação f , denotamos a topologia final por τ^f .

Observação 7.9. O caso em que o uso da topologia final é mais útil é quando se teme apenas uma função f . Para uma família f_λ , se denotarmos por τ^{f_λ} a topologia final induzida pela aplicação f_λ , então, a topologia final induzida pela família toda será

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \tau^{f_\lambda}.$$

Isso porque a inteseção de topologias é uma topologia.

Proposição 7.10. *Dada a aplicação $f : (X, \tau_X) \rightarrow Y$, a topologia final induzida por f é a família*

$$\{A \subset Y \mid f^{-1}(A) \in \tau_X\}.$$

Demonstração. Denote por $\mathcal{F}$ a família $\{A \subset Y \mid f^{-1}(A) \in \tau_X\}$. Evidentemente que $\tau^f \subset \mathcal{F}$, pois $\mathcal{F}$ é a maior família tal que $f^{-1}(\mathcal{F}) \subset \tau_X$. Basta então mostrar que $\mathcal{F}$ é de fato uma topologia... deixemos isso como exercício ao leitor. :-)

Exemplo 7.11 ($f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$). A aplicação

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ x &\mapsto \exp(2\pi xi) \end{aligned}$$

é contínua quando consideramos as topologias usuais, $\tau_{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}$ e $\tau_{\mathbb{S}^1}$ de $\mathbb{S}^1$. A topologia inicial em $\mathbb{R}$ quando consideramos a topologia usual em $\mathbb{S}^1$ é dada por

$$\tau_f = \{A \in \tau_{\mathbb{R}} \mid A = A + \mathbb{Z}\}.$$

Ou, o que dá na mesma,

$$\tau_f = \{A + \mathbb{Z} \mid A \in \mathbb{R}\}.$$

E qual é a topologia final de $f : (\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}}) \rightarrow \mathbb{S}^1$?

Diagramas Comutativos

Quando temos uma família de aplicações cada uma com seu domínio e seu contra-domínio, podemos representá-las em um diagrama. Por exemplo,

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{h} & Z \\ \pi \downarrow & & \uparrow g & \nearrow \tilde{h} & \\ \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y} & & \end{array}$$

Dizemos que o diagrama *comuta* quando “diferentes caminhos” correspondem à mesma aplicação. Se, por exemplo, o diagrama anterior comuta, então sabemos que $g \circ \tilde{f} \circ \pi = f$; ou então, $\tilde{h} \circ \tilde{f} \circ \pi = h \circ f$.

Vamos caracterizar as topologias inicial e final utilizando diagramas comutativos.

Proposição 7.12. *Dada a aplicação $f : X \rightarrow (Y, \tau_Y)$, a topologia inicial τ_f é a única topologia τ_X que torna f contínua e é tal que para todo diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccc} (Z, \tau_Z) & \xrightarrow{g} & (X, \tau_X) \\ & \searrow \tilde{g} & \downarrow f \\ & & (Y, \tau_Y) \end{array}$$

a continuidade de g é equivalente à continuidade de $\tilde{g}$.

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que para $\tau_X = \tau_f$, a continuidade de g é equivalente à de $\tilde{g}$. Primeiramente, por definição, τ_f torna f contínua. Se g for contínua, então $\tilde{g}$ é contínua por ser a composição de duas aplicações contínuas. Por outro lado, supondo que $\tilde{g}$ é contínua, dado $A \in \tau_f$, A é da forma $f^{-1}(U)$, com $U \in \tau_Y$. Assim,

$$g^{-1}(A) = g^{-1}(f^{-1}(U)) = \tilde{g}^{-1}(U).$$

Pela continuidade de $\tilde{g}$, este conjunto é aberto de Z . Ou seja, a imagem inversa de um aberto de X é aberto de Z . Portanto, g é contínua.

Falta mostrar que só existe uma topologia que satisfaz a condição da proposição. Suponha que τ_X e τ_X' ambas satisfaçam a condição do enunciado. Considere, no lugar de g , a identidade

$$\begin{array}{ccc} g : (X, \tau_X') & \rightarrow & (X, \tau_X) \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

Obviamente que o diagrama comuta. E, apenas como aplicação, sem considerar as topologias envolvidas, $\tilde{g} = f$. Ou seja, $\tilde{g}$ é contínua pois τ_X' satisfaz a condição do enunciado de tornar f contínua. Por hipótese, isso implica na continuidade da identidade, o que por sua vez implica em

$$\tau_X' \subset \tau_X.$$

Invertendo os papéis de τ_X e τ_X' , obtemos a unicidade:

$$\tau_X' = \tau_X.$$

□

Observação 7.13. Muitos autores começariam a demonstração anterior pela unicidade. Talvez porque as propriedades, a caracterização e a construção da topologia τ_f — que sabemos existir — entre no caminho e tire a atenção da essência da demonstração da unicidade. Se fôssemos

mostrar que todas as topologias que satisfazem as condições da proposição são necessariamente iguais a τ_f , talvez precisássemos utilizar propriedades específicas da τ_f . Mas não foi isso o que fizemos. Optamos por considerar duas topologias que satisfazem as condições impostas e demonstrar que são necessariamente iguais. Concluindo que *se existe uma*, então é única. Daqui por diante, quando possível, começaremos esse tipo de demonstração pela unicidade.

A topologia final também tem forma semelhante quando utilizamos diagramas comutativos.

Proposição 7.14. *Dada a aplicação $f : (X, \tau_X) \rightarrow Y$, a topologia final τ^f é a única topologia, τ_Y que torna f contínua e é tal que para todo diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccc} (X, \tau_X) & & \\ f \downarrow & \searrow \tilde{g} & \\ Y & \xrightarrow{g} & (Z, \tau_Z) \end{array},$$

a continuidade de g é equivalente à continuidade de $\tilde{g}$.

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que a topologia final satisfaz as condições da proposição. A parte não trivial é mostrar que a continuidade de $\tilde{g}$ implica na continuidade de g . Seja $A \in \tau_Z$, então

$$\tilde{g}^{-1}(A) = (g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$$

é aberto de X . Pela definição de topologia final, temos que $g^{-1}(A)$ é aberto. Ou seja, g é contínua.

A unicidade é demonstrada de maneira semelhante à proposição 7.12. $\square$

7.3 Topologia Produto

Quando temos dois espaços métricos, (A, d_A) e (B, d_B) , de que forma podemos gerar uma métrica em $A \times B$? Se A e B forem o conjunto dos números reais com a métrica usual (euclidiana), o que poderia ser a métrica em $\mathbb{R}^2$? Poderia ser a métrica euclidiana do exemplo 1.10, ou a métrica do máximo do exemplo 1.11, ou então a métrica da soma. Pelo exercício ??, todas essas métricas são topologicamente equivalentes e possuem a seguinte propriedade

Para uma sequência $(a_n, b_n) \in A \times B$ e $(a, b) \in A \times B$, temos que

$$(a_n, b_n) \rightarrow (a, b) \Leftrightarrow a_n \rightarrow a \text{ e } b_n \rightarrow b.$$

Esta propriedade é facilmente verificada para a métrica do máximo e pela equivalência topológica vale para todas as três. A topologia produto que queremos definir — lembre-se que não temos uma métrica — será exatamente a topologia da “convergência coordenada a coordenada”.

Entre dois Espaços

Inspirados pelo fato de que na métrica do máximo (exemplo 1.11), onde as bolas são na verdade quadrados, vamos definir o produto de dois espaços topológicos como sendo o espaço onde a base da topologia serão os “retângulos”.

Definição 7.15 (Topologia do Produto de dois Espaços). *Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) dois espaços topológicos. Definimos a topologia produto, como sendo a topologia $\tau_X \times \tau_Y$, definida no espaço $X \times Y$, gerada pelos conjuntos da forma $U \times V$, onde $U \in \tau_X$ e $V \in \tau_Y$.*

O espaço topológico $(X \times Y, \tau_X \times \tau_Y)$, também é denotado por $(X, \tau_X) \times (Y, \tau_Y)$, e é chamado espaço (topológico) produto.

As projeções canônicas em X e Y

$$\begin{aligned} \pi_X : X \times Y &\rightarrow X \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \pi_Y : X \times Y &\rightarrow Y \\ (x, y) &\mapsto y \end{aligned}$$

exercem papel fundamental no estudo das topologias produto.

Observação 7.16. Na definição 7.15, poderíamos ter dito que a topologia produto é gerada pelos conjuntos da forma $U \times Y$ e $X \times V$, onde $U \in \tau_X$ e $V \in \tau_Y$. No entanto, os conjuntos da forma $U \times V$, além de geradores são também uma base da topologia. Isso está de acordo com a analogia com a métrica do máximo, onde as bolas — que são uma base para a topologia — são os “quadrados.” No caso da topologia produto, não temos “quadrados,” temos “retângulos.”

Proposição 7.17. *Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) dois espaços topológicos e $\tau_{X \times Y}$ uma topologia qualquer no conjunto $X \times Y$. As seguintes afirmações são equivalentes.*

1. A topologia $\tau_{X \times Y}$ é a topologia produto. Ou seja,

$$\tau_{X \times Y} = \tau_X \times \tau_Y.$$

2. Os conjuntos da forma $A \times B$, onde $A \in \tau_X$ e $B \in \tau_Y$ formam uma base de $\tau_{X \times Y}$.

3. Os conjuntos da forma $A \times Y$ e $X \times B$, onde $A \in \tau_X$ e $B \in \tau_Y$ formam uma sub-base de $\tau_{X \times Y}$.

4. A topologia $\tau_{X \times Y}$ é a menor topologia em $X \times Y$ tal que as projeções canônicas são contínuas. Ou seja, é a topologia inicial induzida pelas projeções.

5. Toda aplicação $f : (Z, \tau_Z) \rightarrow (X \times Y, \tau_{X \times Y})$ com domínio em um espaço topológico Z qualquer é contínua se, e somente se, $\pi_X \circ f$ e $\pi_Y \circ f$ forem contínuas.

Demonstração. ■ (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3)

Imediato da definição de topologia produto e da observação 5.14. Basta notar que $(X \times W) \cap (V \times Y) = V \times W$.

■ (3) $\Leftrightarrow$ (4)

As projeções são contínuas se, e somente se, para todo $U \in \tau_X$ e $V \in \tau_Y$, $U \times Y = \pi_X^{-1}(U) \in \tau_{X \times Y}$ e $X \times V = \pi_Y^{-1}(V) \in \tau_{X \times Y}$. Assim, a menor topologia em $X \times Y$ que torna as projeções contínuas é a topologia gerada pelos conjuntos da forma $U \times Y$ e $X \times V$, para $U \in \tau_X$ e $V \in \tau_Y$.

■ (3) $\Leftrightarrow$ (5)

É um caso particular da proposição 7.12. □

Observação 7.18. Se para $f : Z \rightarrow X \times Y$ escrevermos

$$f(z) = (f_x(z), f_y(z)),$$

então $f_x = \pi_X \circ f$ e $f_y = \pi_Y \circ f$. O item (5) da proposição diz que na topologia produto, f é contínua se, e somente se, for contínua em cada coordenada.

Observação 7.19. Para a topologia produto, também vale que

$$(x_n, y_n) \rightarrow (x, y) \Leftrightarrow x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y. \quad (7.1)$$

No entanto, como as sequências convergentes não determinam a topologia, não se pode afirmar que a condição acima determina a topologia produto.

Da mesma forma, se para $f : Z \rightarrow X \times Y$ escrevermos

$$f(z) = (f_x(z), f_y(z)),$$

então o item (5) é análogo a:

a aplicação f é *sequencialmente contínua* (veja a definição ??) se, e somente se, para toda sequência $z_n \rightarrow z$ em Z ,

$$f_x(z_n) \rightarrow f_x(z) \quad \text{e} \quad f_y(z_n) \rightarrow f_y(z)$$

Se ao invés de sequências, utilizássemos o conceito de *redes* — desenvolvido no capítulo ?? —, a relação da equação 7.1 caracterizaria totalmente a topologia. Com redes no lugar de sequências, f será contínua se, e somente se, para toda rede $z_\lambda \rightarrow z$, tivermos

$$f_x(z_\lambda) \rightarrow f_x(z) \quad \text{e} \quad f_y(z_\lambda) \rightarrow f_y(z)$$

Produto Finito

As considerações que foram feitas para o produto de dois espaços topológicos podem ser facilmente estendidas para definir e caracterizar o produto de uma quantidade finita de espaços topológicos. Dados, por exemplo, três espaços topológicos (X, τ_X) , (Y, τ_Y) e (Z, τ_Z) , esperamos que

$$\tau_X \times (\tau_Y \times \tau_Z) = (\tau_X \times \tau_Y) \times \tau_Z.$$

Definição 7.20. Dada uma família de espaços topológicos $(X_1, \tau_{X_1}), \dots, (X_n, \tau_{X_n})$, definimos o espaço produto $(X_1 \times \dots \times X_n, \tau_{X_1} \times \dots \times \tau_{X_n}) = (X_1, \tau_{X_1}) \times \dots \times (X_n, \tau_{X_n})$ como sendo a menor topologia em $X_1 \times \dots \times X_n$ tal que as projeções

$$\begin{aligned} \pi_j : X_1 \times \dots \times X_n &\rightarrow X_j, \quad (j = 1, \dots, n) \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto x_j \end{aligned}$$

são contínuas.

O leitor fica encarregado de enunciar e demonstrar uma proposição análoga a 7.17.

Observação 7.21. Seja $f : X \times Y \rightarrow Z$. O item (5) da proposição 7.17 pode sugerir que a continuidade de f no ponto $(a, b) \in X \times Y$ seja equivalente à continuidade de $f(a, \cdot)$ e $f(\cdot, b)$. No entanto, a continuidade dessas duas *seções* de f é uma condição mais fraca que a continuidade de f .

Se $f(a, \cdot)$ é contínua em b , isso significa que se “nos aproximarmos” de (a, b) na “vertical”, o valor de f se aproxima de $f(a, b)$. A continuidade de $f(\cdot, b)$ em a corresponde à continuidade de f na “horizontal”. No entanto, isso não garante nada sobre o comportamento de f quando “nos aproximamos” de (a, b) pela “diagonal”. Um exemplo concreto é a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \end{cases} .$$

Neste caso, $f(0, y) = f(x, 0) = 0$. No entanto, $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$.

Produto Infinito

Se temos um espaço topológico $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ para cada $\lambda \in \Lambda$, pela experiência com o produto de uma família finita de espaços topológicos podemos logo imaginar duas topologias que poderíamos chamar de *topologia produto*. Uma delas, seria a topologia em $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ gerada pela família dos conjuntos da forma $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, onde $A_\lambda \in \tau_\lambda$. Se estivéssemos falando de espaços métricos, seria como definir a métrica do máximo. Assim, esta topologia seria bastante geométrica e intuitiva. No entanto, não é esta a topologia que chamamos de *topologia produto da família* τ_λ ($\lambda \in \Lambda$). A topologia produto é um pouco mais fraca, possui propriedades importantes (por exemplo, o teorema ??) e é, em geral, mais fácil de se trabalhar. Daqui por diante, vamos omitir o conjunto de índices Λ quando conveniente, para simplificar a notação.

Definição 7.22. Dada uma coleção qualquer de espaços topológicos $(X_\lambda, \tau_\lambda)$, a topologia produto é a menor topologia de $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ onde as projeções em cada coordenada,

$$\begin{aligned} \pi_\gamma : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda &\rightarrow X_\gamma , \\ (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} &\mapsto x_\gamma \end{aligned}$$

são contínuas. O espaço (topológico) produto $\prod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)$, é o conjunto $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, dotado da topologia produto.

Novamente, o leitor fica encarregado de enunciar e demonstrar uma proposição análoga a 7.17.

7.4 Topologia Quociente

Quando temos um conjunto qualquer X , é comum querermos identificar uma classe de pontos de X como se fossem um só. A idéia é tomar uma *partição* $\tilde{X}$ de X . Ou seja, uma família de subconjuntos $A \subset X$ disjuntos, tais que que

$$X = \bigcup_{A \in \tilde{X}} A.$$

Existe uma projeção natural

$$\begin{aligned} \pi : X &\rightarrow \tilde{X} , \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

onde $[x]$ é o único elemento $A \in \tilde{X}$ tal que $x \in A$. Assim, podemos colocar em $\tilde{X}$ a topologia final induzida por π .

Relação de Equivalência

Estamos preocupados em “particionar” um conjunto X e pensar no conjunto $\tilde{X}$ formado pelos elementos da partição escolhida. Uma maneira muito comum de se escolher uma partição de X é através de uma *relação de equivalência*. Não vamos entrar em detalhes quanto às propriedades das relações de equivalência, mas de fato, definir em X uma *relação de equivalência* equivale a particioná-lo.

Definição 7.23. *Uma relação $\sim$ em um conjunto X é simplesmente um subconjunto de X^2 . Usualmente escrevemos*

$$a \sim b$$

ao invés de dizer que (a, b) pertence à relação $\sim$.

Definição 7.24. *Uma relação $\sim$ definida em um conjunto X é uma relação de equivalência se satisfizer:*

- $a \sim a$.
- $a \sim b \Rightarrow b \sim a$.
- $a \sim b$ e $b \sim c \Rightarrow a \sim c$.

Definir uma relação de equivalência em X é equivalente a particioná-lo, pois dada uma relação de equivalência podemos particionar X em *classes de equivalência*, ou seja, nos conjuntos

$$[a] = \{x \in X \mid x \sim a\}.$$

Do mesmo modo, dada uma partição A_λ de X , podemos definir a relação de equivalência

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists A_\lambda \text{ tal que } a, b \in A_\lambda.$$

Notação. Dada uma relação de equivalência $\sim$ em X , denotamos por $X/\sim$ o conjunto das classes de equivalência de $\sim$. A projeção natural de X em $X/\sim$ é a aplicação dada por

$$\begin{aligned} \pi : X &\rightarrow X/\sim \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

Definição 7.25. Quando X é um espaço topológico e $\sim$ uma relação de equivalência definida sobre X , a topologia quociente em $X/\sim$ é a topologia final induzida pela projeção natural.

Seja X um conjunto e $\sim$ uma relação de equivalência em X . Suponha que a aplicação

$$f : X \rightarrow Y$$

seja tal que $a \sim b \Rightarrow f(a) = f(b)$. Neste caso, podemos definir

$$\begin{aligned} \tilde{f} : X/\sim &\rightarrow Y \\ [x] &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Note que o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \pi \downarrow & \searrow f & \\ X/\sim & \xrightarrow{\tilde{f}} & Y \end{array}$$

é comutativo. Assim, pela proposição 7.14, sabemos que a topologia quociente fará com que uma eventual continuidade da aplicação f seja equivalente à continuidade de $\tilde{f}$.

Construções com “quocientes” são muito comuns, por exemplo, em álgebra, onde quocientamos grupos por sub-grupos normais, anéis por ideais, espaços vetoriais por sub-espacos vetoriais e assim por diante. Em muitos casos, essas estruturas algébricas são também dotadas de topologia. Mais a diante, no capítulo ??, por exemplo, veremos como o estudo da topologia pode facilitar a compreensão desse tipo de estrutura.

Exemplos

Exemplo 7.26 (O Círculo Unitário $\mathbb{S}^1$). O círculo unitário $\mathbb{S}^1$ pode ser visto, dentre outras maneiras, como o subconjunto dos números complexos de valor absoluto 1, ou como o conjunto $\mathbb{R}/\sim$, onde

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}.$$

Costumamos denotar este quociente por $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Neste caso, podemos pensar, por exemplo, nas seguintes topologias em $\mathbb{S}^1$:

1. A topologia induzida em $\mathbb{S}^1$ quando visto como um subconjunto de $\mathbb{C}$.
2. A topologia final induzida pela aplicação

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ x &\mapsto \exp(2\pi x) \end{aligned}.$$

3. A topologia quociente dada pela identificação entre $\mathbb{S}^1$ e $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Vamos ver que as topologias dos itens 2 e 3 são de fato a mesma topologia. Isso porque a relação $\sim$ é dada exatamente por

$$a \sim b \Leftrightarrow f(a) = f(b),$$

fazendo com que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & & \\ \pi \downarrow & \searrow f & \\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C} \end{array}$$

seja comutativo. Onde $\tilde{f}$ é justamente a identificação entre $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e $\mathbb{S}^1$. As aplicações f e π são contínuas nas topologias final e quociente, respectivamente. Pela caracterização de topologia quociente, isso implica que tanto $\tilde{f}$ quanto $\tilde{f}^{-1}$ são contínuas. Ou seja, $\tilde{f}$ é um homeomorfismo.

Quanto à equivalência entre os itens 1 e 3, considere $\mathbb{S}^1$ com a topologia induzida. Sabemos que, como f é contínua, então $\tilde{f}$ também é. Para concluir que todas as três topologias são iguais, precisamos mostrar que $\tilde{f}^{-1}$ é contínua quando $\mathbb{S}^1$ é dotado da topologia induzida. Isso será feito mais adiante. Será consequência direta da proposição ??.

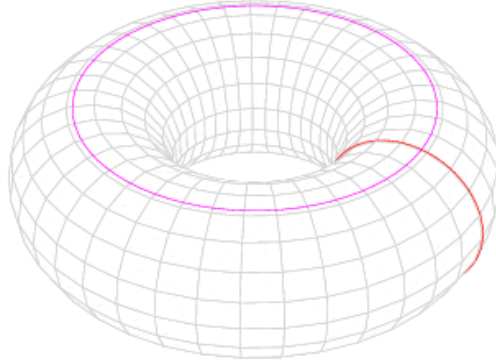


Figura 7.1: Um toro bidimensional, além de poder ser visto como um subespaço do $\mathbb{R}^3$, pode também ser identificado com o produto cartesiano $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. O toro é apenas a “casca da figura”.

Exemplo 7.27 (O Toro $\mathbb{T}^n$). Uma generalização do exemplo anterior, é o chamado *toro bi-dimensional*: $\mathbb{T}^2$. Ou, de modo mais geral, o *toro n-dimensional*: $\mathbb{T}^n$.

O toro n -dimensional pode ser definido como o espaço produto $\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ de n cópias do círculo unitário (figura 7.1), mas também pode ser visto como o espaço quociente $\mathbb{R}^n / \sim$, onde a relação $\sim$ é dada por

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}^n.$$

Costumamos denotar este quociente por $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$.

Podemos colocar no toro a topologia produto ou a topologia quociente. Novamente, ambas serão de fato, a mesma topologia. Para ver isso, basta considerar o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & & \\ \pi \downarrow & \searrow f & \\ \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1 \end{array},$$

onde f é dado por

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1 \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto ([x_1], \dots, [x_n]) \end{aligned}.$$

7.5 Topologias das Sequências Convergentes

Se temos um conjunto X e uma topologia τ_X sobre X , sabemos exatamente quais são e quais não são as sequências convergentes. No entanto, conhecer as sequências convergentes não garante que conheçamos a topologia. De fato, duas topologias distintas podem ter exatamente as mesmas sequências convergentes.

Exemplo 7.28. Considere (X_1, τ_1) , onde

$$\tau_1 = \mathcal{P}(X)$$

e X é não enumerável. As sequências convergentes em τ_1 são aquelas que a partir de um certo índice se tornam constantes. Ou seja, as sequências constantes a menos de um número finito de termos.

Considere agora τ_2 dada por

$$\tau_2 = \{A \subset X \mid A^c \text{ é enumerável}\}.$$

Fica como exercício mostrar que τ_2 é de fato uma topologia. Evidentemente que as sequências constantes a menos de um número finito de termos convergem nesta e em qualquer outra topologia. Considere então a sequência $x_1, x_2, \dots$. Suponha que

$$x_n \xrightarrow{\tau_2} x.$$

O conjunto

$$V = \{x_n \mid x_n \neq x\}^c$$

é vizinhança aberta de x em τ_2 . A convergência de x_n implica que para um certo N ,

$$n > N \Rightarrow x_n \in V.$$

Mas x_n só está em V se $x_n \neq x$. Ou seja, x_n é constante a menos, possivelmente, de $x_1, \dots, x_N$.

Pergunta: porque sabemos que $\tau_1 \neq \tau_2$?

Dado um espaço topológico (X, τ_X) , podemos indagar se existe uma topologia τ_m que é a menor onde as sequências convergentes são as mesmas que de τ_X . Também podemos nos perguntar se não existe a maior topologia τ_M com esta mesma propriedade. Se existisse τ_m , então seria a interseção da família de todas as topologias τ_λ que satisfazem a condição

$$x_n \xrightarrow{\tau_\lambda} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\tau_X} x.$$

Vamos definir então τ_m como sendo

$$\tau_m = \bigcap \tau_\lambda.$$

Evidentemente que como $\tau_m \subset \tau_X$, então toda vizinhança de x em τ_m também é uma vizinhança em τ_X . Portanto,

$$x_n \xrightarrow{\tau_X} x \Rightarrow x_n \xrightarrow{\tau_m} x.$$

No entanto, a implicação contrária pode não ser verdadeira. Denotando por $\mathcal{F}$ a família

$$\mathcal{F} = \{\tau_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\},$$

temos que o ínfimo de $\mathcal{F}$, $\tau_m = \bigwedge \mathcal{F}$, existe. No entanto, é possível que $\tau_m \notin \mathcal{F}$.

Por outro lado, vamos definir

$$\tau_M = \left\{ V \subset X \mid x_n \xrightarrow{\tau_X} x \in V \Rightarrow \exists N, \forall n \geq N, x_n \in V \right\}.$$

É evidente que τ_M é uma topologia e é mais forte que τ_X (ou qualquer outra topologia pertencente a $\mathcal{F}$). O leitor é convidado a demonstrar essas duas afirmações.

Como $\tau_X \subset \tau_M$, sabemos que

$$x_n \xrightarrow{\tau_M} x \Rightarrow x_n \xrightarrow{\tau_X} x.$$

Por outro lado, pela definição de τ_M , sabemos que

$$x_n \xrightarrow{\tau_X} x \Rightarrow x_n \xrightarrow{\tau_M} x.$$

Assim, $\tau_M \in \mathcal{F}$. Ou seja, sempre existe a topologia mais forte determinada pela família de sequências convergentes de uma topologia τ_X dada. Resumindo,

$$\bigvee \mathcal{F} = \tau_M \in \mathcal{F}.$$