

Topologia Geral de Vários Ângulos

André Caldas de Souza
and YOU! :-)

7 de maio de 2010

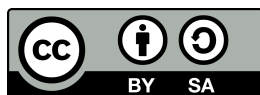
Este Livro é Livre

Este livro pode ser copiado à vontade. Se você recebeu em formato digital, fique à vontade para copiá-lo e comparilhá-lo quantas vezes quiser. Você pode também imprimí-lo e copiá-lo o tanto que quiser. Claro que é sempre importante pensar na natureza e no impacto ambiental. Procure não desperdiçar recursos. ;-)

Quer imprimir e vender este livro para os seus colegas? Fique à vontade, também! Você é dono de uma editora e quer imprimir sua própria versão, vender e ficar rico com esse livro sem precisar pagar nenhum tostão em direitos autorais? Pois na minha opinião, se você o fizer estará contribuindo para um mundo melhor. Uma das poucas restrições é que você não tire dos outros essa liberdade que lhe foi concedida. Se você passar esse livro pra frente, não poderá proibir aquele que o recebeu de fazer o mesmo.

Este livro está licenciado sob os termos da licença “Creative Commons Attribution Share Alike 3.0”. Os termos estão disponíveis na internet através do endereço

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.



A versão mais atual deste livro pode ser encontrada na internet no endereço

<http://ourproject.org/projects/topologia-geral/>.

Neste endereço também podem ser encontrados os arquivos $\text{\LaTeX}$, que podem ser alterados e usados para criar sua própria versão do livro.

Sobre o OurProject.org

O site onde está hospedado o projeto deste livro é um repositório de conteúdos livre. Qualquer um que queira produzir conteúdos livres – como

livros, poesias, músicas, vídeos e etc. – pode utilizá-lo como ferramenta. Ah... o site sobrevive com doações. ;-)

Endereço: <http://ourproject.org/>

Faz algum tempo que eu procurava um lugar que pudesse hospedar o projeto de um livro livre. Já estava pensando em tentar fazer alguma coisa nesse estilo dentro do próprio departamento de matemática da UnB. Felizmente encontrei o OurProject e isso não será mais necessário.

Como Ajudar?

A melhor maneira de ajudar, é repassando este livro para o maior número de pessoas! Quanto mais pessoas tiverem interesse no livro, maiores serão as chances de se atingir um bom nível de qualidade. Sugestões, correções ou contribuições podem ser enviadas para o e-mail topologia-geral-discussion@lists.ourproject.org. Ainda não sei quão aberto a sugestões estou disposto a ser. No entanto, você é livre para, respeitando os termos da licença, criar sua própria versão e incluir seu próprio conteúdo. Os arquivos que compõem o projeto deste livro podem ser baixados do repositório SVN no endereço

https://ourproject.org/scm/?group_id=914.

Contribuindo com Figuras

Me falta um certo dom para criar figuras de qualidade. :-)

Se você puder contribuir com imagens, estas devem estar preferencialmente no formato SVG. O SVG foi adotado por ser um *padrão aberto* baseado em XML. O aplicativo que eu uso para criar figuras é *software livre* e chama-se *Inkscape*. A página do projeto *Inkscape* é <http://www.inkscape.org/>.

Contribuindo com Código L^AT_EX

Os arquivos L^AT_EX devem seguir o mesmo tipo de formatação dos demais. Na medida do possível, o arquivo L^AT_EX não deve conter “gambiarras” ou comandos de formatação explícitos no meio do texto.

Os arquivos do projeto contém várias linhas com comentários explicando o que falta ser feito. Basta procurar pela palavra TODO (a fazer).

Por Quê?

Eu (André Caldas) NÃO acredito que “coletar taxas” seja a melhor maneira de se sobreviver da produção cultural. Na minha opinião, as pessoas devem receber para produzir, e não produzir na esperança de que vão “coletar taxas” relativas ao direito autoral para o resto da vida. Eu, por exemplo, atualmente sou estudante de doutorado da UnB e recebo uma bolsa de estudo da CAPES. Apesar de a bolsa não cobrir os custos para a produção deste livro, foi esta mesma bolsa que viabilizou que eu pudesse deixar o meu emprego para me dedicar às minhas atividades acadêmicas. Ou seja, a sociedade já me oferece meios para que eu possa me dedicar às minhas atividades acadêmicas, e estas incluem a produção deste livro. :-)

Não vejo sentido em um professor de uma universidade pública, que já recebe um salário do governo para que produza conhecimento, ter monopólios sobre o fruto do seu trabalho. Vejo menos sentido ainda quando esse professor vende tal monopólio para ser explorado. Perceba que isso não é uma crítica ao lucro ou à exploração da produção científica. É uma crítica ao monopólio sobre os direitos de uso daquilo que foi produzido com dinheiro público. Não faz sentido que a sociedade faça esse tipo de investimento e depois não possa ter acesso ao que foi produzido. Livros é o menor dos problemas. Vemos que pesquisas para o desenvolvimento de medicamentos ou qualquer outra coisa que vá melhorar a qualidade de vida da população, como melhoria na alimentação e acesso ao lazer, são feitas com dinheiro público em parceria com instituições privadas de modo que a sociedade acaba sendo privada de seus frutos. Não acredito que seja errado fazer parceria com instituições privadas. O que não se pode é privar a sociedade dos frutos do trabalho no qual investiu. Vemos instituições de pesquisa se valerem de recursos públicos durante as pesquisas e depois correrem atrás de registros de patentes e coisas do tipo que servem apenas ao propósito de privar a sociedade dos frutos dessa mesma pesquisa.

Se o governo, por exemplo, a uns 10 anos atrás tivesse começado a financiar a produção de livros e exigisse que o fruto desse trabalho fosse verdadeiramente livre (como é este livro), hoje não faríamos licitações para a “compra” de livros; faríamos uma licitação para a impressão e a distribuição desses livros. Falta visão de longo prazo. Deveríamos investir na produção de livros livres. O autor deve sim receber por seu trabalho. Só que deve receber enquanto faz o trabalho, e não depois através do recolhimento de taxas e de mecanismos de opressão, como os que apreendem máquinas de fotocópia nas universidades.

Tenho vários amigos que fazem cópias de muitos livros. Sempre lembro a eles que quando virarem autores não devem “virar a casaca” e começar a

perseguir os que fazem cópias. Gostaria de fazer o mesmo pedido ao leitor!
:-)

Brasília, 23 de abril de 2010,
André Caldas

Prefácio

Os livros que tratam do assunto *topologia* parecem se dividir em duas categorias:

- Começam com definições abstratas e pouco motivadas.
- Tratam *apenas* de espaços métricos.

Os espaços métricos são sem dúvida a melhor motivação para o estudo da *topologia geral*. No entanto, existem muitos conceitos, como os de *sequência de Cauchy*, *espaço completo* e *continuidade uniforme*, que não são conceitos topológicos. O que acontece é que os textos que tratam de topologia dos espaços métricos dão muita ênfase a esses conceitos, à *equivalência de métricas*, ao *completamento de espaços*, à *metrizabilidade de uma topologia*, e por aí vai. O fato é que dessa forma não se tem um curso de *topologia*, tem-se um curso de *espaços métricos*.

Por outro lado, sem falar de espaços métricos é muito difícil dar alguma motivação para o que venha a ser uma *topologia*. Assim, neste livro o que foi feito foi uma introdução rápida aos espaços métricos sem se fazer nenhuma menção a questões que não fossem puramente topológicas. Falamos de bolas, de convergência e de continuidade. A idéia é a de se fazer uma transição entre as formulações que enfatizam mais a métrica do espaço até chegar a formulações que dependam apenas da topologia.

Um outro diferencial deste livro está na busca por maneiras alternativas de se olhar para os fenômenos topológicos. Em geral os conjuntos abertos recebem atenção demasiada. Por exemplo, quando estudamos análise funcional, estamos bastante interessados na continuidade de operadores lineares em topologias que são invariantes por translações. Neste caso a continuidade se resume à continuidade na origem. Quando consideramos a continuidade em um único ponto do espaço, a preocupação em demonstrar que determinados conjuntos são *abertos* é um exagero desnecessário. Deveríamos nos preocupar se são ou não *vizinhanças* de 0. A intenção é que o leitor consiga identificar maneiras alternativas que melhor se adaptem ao

fenômeno que está sendo analisado. Para um determinado caso, talvez o melhor seja considerar *abertos*, talvez *vizinhanças*, *redes*, *sequências*, *fechados*, *filtros* e etc.

Sumário

Este Livro é Livre	i
Prefácio	v
Sumário	vii
I Espaços Métricos	1
1 Definição e Propriedades	2
1.1 Definição	2
1.2 Propriedades Elementares	4
1.3 Exemplos	7
2 Topologia Usando uma Métrica	9
2.1 Seqüências e Convergência	9
2.2 Continuidade	11
2.3 Topologia com Bolas	12
3 Topologia de Espaços Métricos: releitura	14
3.1 Vizinhanças	14
3.2 Continuidade em um Ponto	16
3.3 Base de Vizinhanças	17
3.4 Conjuntos Abertos	19
3.5 Continuidade em Todo Ponto	21
II Topologia Geral	22
4 Motivação e Definições	23
4.1 Motivação	23
4.2 Definição	25

4.3	Vizinhanças e Base de Vizinhanças de um Ponto	26
4.4	Continuidade em um Ponto	27
4.5	Continuidade	28
5	Construindo Topologias	32
5.1	Relembrando Espaços Métricos	32
5.2	Sub-Base	32
5.3	Bases	32
5.4	Crítérios de Convergência e Continuidade	32
6	Topologias Derivadas de Outras Topologias	33
6.1	Topologia de um Sub-Espaço	33
6.2	Topologia Produto	33
6.3	Topologia Inicial	33
6.4	Topologia Final	33
6.5	Topologia Quociente	33

Parte I

Espaços Métricos

Definição e Propriedades

Vamos descrever (definir) o que se entende por *espaço métrico* (definição 1.1.1), e estudar propriedades desses espaços que nos motivarão a definir o conceito mais geral de espaço topológico (definição 4.2.1).

Os conhecimentos adquiridos neste capítulo serão importantes para que o leitor possa ter exemplos concretos e também motivação suficiente para reconhecer a utilidade e aceitar com naturalidade os conceitos que serão apresentados nos capítulos seguintes.

1.1 Definição

Um espaço topológico é um conjunto X , munido de uma métrica $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$. A métrica faz com que esteja definida uma noção de *distância* entre os pontos de X .

Definição 1.1.1 (Métrica). *Seja X um conjunto qualquer. Uma métrica definida sobre X é uma função*

$$\begin{aligned} d : X \times X &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) \end{aligned}$$

que, para todo $x, y, z \in X$, satisfaz

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (desigualdade triangular)

Dizemos que (X, d) é um espaço métrico. Em geral, por um abuso de linguagem, quando a métrica d está subentendida, dizemos que X é um espaço métrico.

Em $\mathbb{R}^n$, a métrica usualmente adotada é a métrica euclidiana, dada por

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2}. \quad (1.1)$$

Onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Em várias situações, o item (1) da definição de métrica, nos permitirá concluir que dois pontos $x, y \in X$ são de fato o mesmo ponto. Basta mostrar que $d(x, y) = 0$. O item (3) é o mais importante da definição. É este item que abstrai a idéia de que a distância entre dois pontos está intimamente relacionada com o “menor caminho” entre dois pontos:

Se existe um caminho A , partindo de x e indo para y , e um caminho B , partindo de y e indo para z , então, a menor distância (ou o ínfimo dos comprimentos dos caminhos partindo de x e indo para z) não é maior do que a soma dos comprimentos de A e B . (figura 1.1)

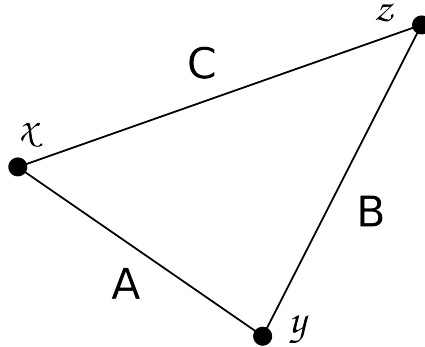


Figura 1.1: Desigualdade triangular: $C \leq A + B$.

Definição 1.1.2 (Bola). Seja (X, d) um espaço métrico, $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. A bola de centro x e raio ε é o conjunto de todos os pontos que distam menos que ε de x :

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}.$$

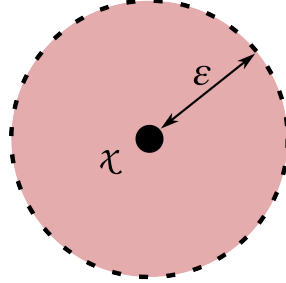


Figura 1.2: A bola de centro x e raio ε .

1.2 Propriedades Elementares

Nesta seção, (X, d) é um espaço métrico. As propriedades mais interessantes dos espaços métricos são consequência da desigualdade triangular. Muitas vezes, essas propriedades são mais fáceis de serem visualizadas quando consideramos a distância euclidiana em $\mathbb{R}^2$. Ou seja, quando fazemos um desenho em uma folha de papel. É importante enfatizar que no entanto, os resultados dependem apenas das propriedades das métricas (definição 1.1.1). O desenho melhora a intuição, mas não é uma demonstração.

Todas as proposições deste capítulo são muito simples. O leitor deve ser capaz de completar as demonstrações que afirmam, por exemplo, que basta tomar um certo δ para concluir a demonstração.

Proposição 1.2.1. *Sejam $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$B_{\frac{1}{n}}(x) \subset B_{\varepsilon}(x).$$

Demonstração. Basta tomar n grande o suficiente para que $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$. □

A seguinte proposição, apesar de muito simples, é fundamental para o desenvolvimento de toda a teoria que se seguirá, e é consequência direta da desigualdade triangular.

Proposição 1.2.2. *Sejam $x \in X$, $\varepsilon > 0$ e*

$$y \in B_{\varepsilon}(x).$$

Então, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_{\delta}(y) \subset B_{\varepsilon}(x).$$

Veja a figura 1.3.

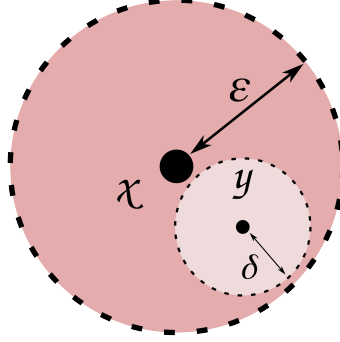


Figura 1.3: Para cada ponto y da bola $B_\varepsilon(x)$, temos uma “bolinha” centrada em y e toda contida em $B_\varepsilon(x)$.

Demonstração. Basta tomar $\delta < \varepsilon - d(x, y)$. Neste caso,

$$\begin{aligned} z \in B_\delta(y) &\Rightarrow d(y, z) < \delta \\ &\Rightarrow d(x, z) < d(x, y) + \delta < \varepsilon \\ &\Rightarrow z \in B_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

□

Proposição 1.2.3. *Sejam $x_1, x_2 \in X$, e $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Então, dado $z \in B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap B_{\varepsilon_2}(x_2)$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$B_\delta(z) \subset B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap B_{\varepsilon_2}(x_2).$$

Veja a figura 1.4.

Demonstração. Pela proposição 1.2.2, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} B_{\delta_1}(z) &\subset B_{\varepsilon_1}(x_1) \\ B_{\delta_2}(z) &\subset B_{\varepsilon_2}(x_2). \end{aligned}$$

Basta portanto tomar qualquer $\delta \leq \min(\delta_1, \delta_2)$.

□

Repare que a proposição “vale” para qualquer número finito de bolas $B_{\varepsilon_1}(x_1), \dots, B_{\varepsilon_n}(x_n)$. Mas não “vale” para um número infinito de bolas.

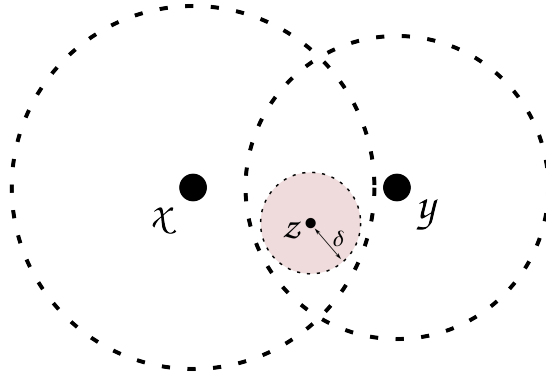


Figura 1.4: Para cada ponto z da interseção $B_{\epsilon_1}(x) \cap B_{\epsilon_2}(y)$, temos uma “bolinha” centrada em z e toda contida na interseção.

Proposição 1.2.4. *Sejam $x, y \in X$ dois pontos distintos de X . Então existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$B_\epsilon(x) \cap B_\epsilon(y) = \emptyset.$$

Veja a figura 1.5.

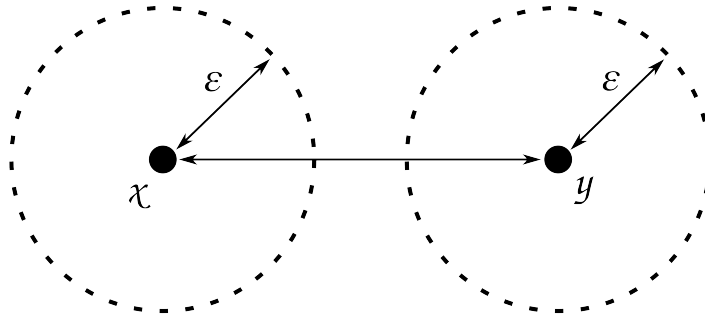


Figura 1.5: Dois pontos distintos x e y podem ser “separados” por bolas disjuntas.

Demonstração. Como $x \neq y$, temos que $d(x, y) > 0$. Basta tomar

$$\epsilon \leq \frac{d(x, y)}{2}.$$

□

Proposição 1.2.5. *Seja $x \in X$. Então,*

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} B_\varepsilon(x) = \{x\}.$$

Demonstração. Basta mostrar que dado $y \in X$ com $y \neq x$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$y \notin B_\varepsilon(x).$$

Isso segue como um caso particular da proposição 1.2.4. $\square$

1.3 Exemplos

Exemplo 1.3.1 (Métrica Usual dos Reais). Considere o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. A seguinte métrica é a métrica usual dos números reais:

$$d(x, y) = |y - x|.$$

O espaço $(\mathbb{R}, d)$ é um espaço métrico.

Exemplo 1.3.2 (Métrica Discreta). Seja X um conjunto qualquer. Então, se definirmos a *métrica discreta* em X por

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

Exemplo 1.3.3 (Métrica Euclidiana de $\mathbb{R}^n$). Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Agora, defina

$$d(x, y) = \|y - x\|,$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana de $\mathbb{R}^n$. O espaço $(\mathbb{R}^n, d)$ é um espaço métrico. Além do mais, possui as seguintes propriedades:

1. Para todo $a, x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x + a, y + a) = d(x, y)$.
2. Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|d(x, y)$.

Poderíamos ter feito o mesmo para $\mathbb{C}^n$.

Exemplo 1.3.4 (Os Complexos e o $\mathbb{R}^2$). Podemos identificar um número complexo $z = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ com o elemento $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Assim, usando a métrica euclidiana de $\mathbb{R}^2$, obtemos a métrica

$$d(\alpha_1 + \beta_1 i, \alpha_2 + \beta_2 i) = \sqrt{(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2 - \beta_1)^2}.$$

Exemplo 1.3.5 (Identificando Dois Conjuntos). O que fizemos no exemplo 1.3.4, poderia ter sido feito para qualquer injeção. Se (X, d) é um espaço métrico, e $f : Y \rightarrow X$ é uma injeção partindo de um conjunto qualquer Y , então podemos definir a seguinte métrica no conjunto Y :

$$d(y_1, y_2) = d(f(y_1), f(y_2)).$$

Exemplo 1.3.6 (Restrição a um Subconjunto). Seja (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$. Então, $(A, d|_{A \times A})$ é também um espaço métrico. De fato, esta construção é exatamente o que foi feito no exemplo 1.3.5 onde a identificação entre A e X é a identidade:

$$\begin{array}{ccc} \text{id} : & A & \rightarrow X \\ & a & \mapsto a \end{array}$$

Exemplo 1.3.7. Seja X um conjunto qualquer. Denote por F o conjunto de todas as funções $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. A seguinte função NÃO é uma métrica em F :

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |g(x) - f(x)|.$$

Isso porque é possível que $d(f, g) = \infty$. No entanto, se considerarmos o conjunto $F' = \{f \in F \mid d(f, 0) < \infty\}$, onde 0 representa a função constante de valor 0 , então $(F', d|_{F'})$ é um espaço métrico. Note que poderíamos ter usado qualquer outra função no lugar de 0 .

Sempre podemos fazer isso quando uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ satisfaz, com exceção da possibilidade de assumir o valor ∞ , as condições para ser uma métrica. Esse artifício é utilizado por exemplo, em análise funcional, quando se estudam os chamados espaços L^p . É importante notar que a função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ está bem definida. Apenas não é uma métrica se assumir o valor ∞ .

Topologia Usando uma Métrica

Vamos ver como a métrica (distância) é utilizada para descrever aspectos topológicos dos espaços métricos. Veremos como uma métrica é utilizada para descrever *convergência de seqüências* (definição 2.1.1), *continuidade de funções* (definição 2.2.2 e proposição 2.3.2).

Neste capítulo, (X, d) é um espaço métrico.

2.1 Seqüências e Convergência

Seja $n \in \mathbb{N}$. A seqüência de pontos $x_n = \frac{1}{n}$ é tal que, “na medida que n se torna suficientemente grande, a seqüência x_n se aproxima de 0”. Nesta sessão, vamos formalizar o que entendemos por:

Na medida que n se torna suficientemente grande, $\frac{1}{n}$ se aproxima de 0.

Para um espaço métrico X , a noção de “se aproxima de” é um tanto quanto natural, já que temos uma métrica que nos dá uma noção de distância. A grosso modo, $x_n \in X$ se aproxima de x quando a distância entre x_n e x , $d(x_n, x)$, se aproxima de 0. Faltaria então definir o que significa dizer que a seqüência de números reais $d(x_n, x)$ “se aproxima” de 0.

Definição 2.1.1 (Convergência). *Seja $x_n \in X$ ($n \in \mathbb{N}$). Dizemos que x_n converge para um certo $x \in X$, e denotamos tal fato por $x_n \rightarrow x$, quando para todo $\varepsilon > 0$, existir $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

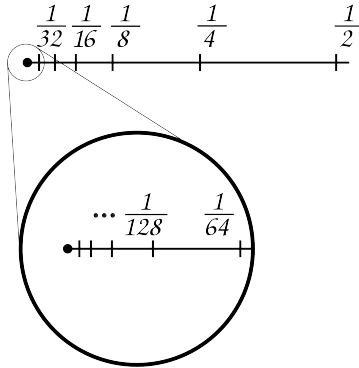


Figura 2.1: A sequência $\frac{1}{2^n}$ “se aproxima” de 0.

Também dizemos que x é o limite da sequência x_n e escrevemos $x = \lim x_n$.

Também escrevemos $x_n \xrightarrow{d} x$, quando queremos enfatizar que a convergência é dada pela métrica d .

A definição 2.1.1 generaliza o que já fazemos para os números reais. No caso dos números reais, usualmente adotamos a métrica $d(x, y) = |y - x|$.

Definição 2.1.2 (Convergência usual em $\mathbb{R}$). *Seja $\alpha_n \in \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$). Dizemos que α_n converge para $\alpha \in \mathbb{R}$, e denotamos tal fato por $\alpha_n \rightarrow \alpha$, quando para todo $\varepsilon > 0$, existir $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq N \Rightarrow |\alpha - \alpha_n| < \varepsilon.$$

Poderíamos ter tomado um outro caminho. Já de posse da definição 2.1.2, poderíamos ter definido convergência em espaços métricos de acordo com a seguinte proposição.

Proposição 2.1.3. *Seja $x_n \in X$ uma sequência. Faça $d_n = d(x_n, x)$. Então*

$$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow d_n \rightarrow 0.$$

Onde a convergência do lado direito é dada pela definição 2.1.2 ou, equivalentemente, pela métrica euclidiana em $\mathbb{R}$.

Demonstração. É evidente, pois $d(x_n, x) \rightarrow 0$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

□

Proposição 2.1.4. *Seja $x_n \in X$ uma sequência e $x \in X$. Então são equivalentes:*

1. *A sequência converge: $x_n \rightarrow x$.*
2. *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow x_n \in B_\varepsilon(x)$.*
3. *Para todo $m \in \mathbb{N}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow x_n \in B_{\frac{1}{m}}(x)$.*

Demonstração. A equivalência entre os itens (2) e (3) segue da proposição 1.2.1.

Para a equivalência entre (1) e (2), basta notar que $x_n \in B_\varepsilon(x) \Leftrightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$, e então fazer a substituição na definição 2.1.1. $\square$

Definição 2.1.5 (Métricas topologicamente equivalentes). *Enquanto não definimos o que é uma topologia, vamos dizer que duas métricas d_1 e d_2 sobre X determinam a mesma topologia (são topologicamente equivalentes) quando*

$$x_n \xrightarrow{d_1} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{d_2} x.$$

O objetivo da primeira parte deste livro é o de dar motivação para os conceitos de topologia geral que serão apresentados na segunda parte. A este propósito serve a proposição 2.1.4, que apresenta maneiras alternativas de se olhar para a convergência de sequências em espaços métricos. Na medida em que substituímos a métrica $d(x_n, x)$ pela bola $B_\varepsilon(x)$, as formulações ficam mais parecidas com suas correspondentes para espaços topológicos gerais

2.2 Continuidade

Olhando para o gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ na figura 2.2, você diria que f é contínua em a ?

De que modo podemos expressar formalmente o significado de f ser ou não contínua em a ? Note que no exemplo da figura 2.2,

$$f\left(a + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 2 \neq f(a).$$

Muitos expressam esse fato dizendo que f tem um “salto” em a .

Definição 2.2.1. *Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos. Dizemos que $f : X \rightarrow Y$ é contínua em $a \in X$ quando*

$$a_n \rightarrow a \Rightarrow f(a_n) \rightarrow f(a).$$

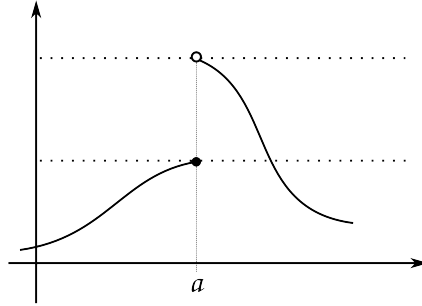


Figura 2.2: Como formular matematicamente que f é descontínua em a ?

Definição 2.2.2. *Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos. Dizemos que $f : X \rightarrow Y$ é contínua quando for contínua em todo ponto $a \in X$.*

Notação. *Também escrevemos $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ para indicar que estamos considerando os espaços métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) , e que f é uma função de X em Y .*

Observação 2.2.3. A continuidade depende apenas da “topologia” dos espaços considerados. Se $f : X \rightarrow Y$ é contínua quando considerados os espaços métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) , então será contínua nos espaços (X, d'_X) e (Y, d'_Y) sempre que as métricas d_X e d_Y forem equivalentes a d'_X e d'_Y , respectivamente.

2.3 Topologia com Bolas

Até o presente momento, temos trabalhado com sequências. Nesta seção vamos formular os mesmos conceitos utilizando bolas. Para que a transição entre sequências e bolas seja suave, vamos começar reavaliando a proposição 2.1.4.

A proposição afirma que dizer que x_n converge para x é o mesmo que dizer que toda bola centrada em x contém todos os x_n , exceto talvez para uma quantidade finita de índices n . Note que na proposição 2.1.4 falávamos em “para todo $\varepsilon > 0$ ”, mas isso é o mesmo que dizer “para toda bola”!

Resumindo o que já havia sido feito, temos a seguinte caracterização para a convergência de uma sequência.

Proposição 2.3.1. *Seja X um espaço métrico e $x_n \in X$ uma sequência de elementos de X . Então, x_n converge para $x \in X$ se, e somente se, para toda bola $B_\varepsilon(x)$ centrada em x , existir $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in B_\varepsilon(x).$$

Demonstração. Veja a proposição 2.1.4. □

Proposição 2.3.2. *Sejam X e Y espaços métricos. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *A função $f : X \rightarrow Y$ é contínua em $a \in X$.*
2. *Para toda bola $B_{f(a)} = B_\varepsilon(f(a))$ centrada em $f(a)$, existe uma bola $B_a = B_\delta(a)$ centrada em a , tal que*

$$f(B_a) \subset B_{f(a)}.$$

3. *Para toda bola $B = B_\varepsilon(f(a))$ centrada em $f(a)$, $f^{-1}(B)$ contém alguma bola centrada em a .*

Demonstração. A equivalência entre os itens (2) e (3) é evidente, já que dizer que existe uma bola é o mesmo que dizer que existe $\delta > 0$.

Vamos mostrar que o item (3) implica na continuidade de f no ponto a de acordo com a definição 2.2.1. Seja $x_n \rightarrow a$. Vamos mostrar que $f(x_n) \rightarrow f(a)$. Tome uma bola qualquer B centrada em $f(a)$. Por hipótese, $f^{-1}(B)$ contém uma bola B_a centrada em a . Pela proposição 2.3.1, temos que $x_n \in B_a \subset f^{-1}(B)$ exceto para um número finito de índices n . Ou seja, $f(x_n) \in B$, exceto para um número finito de índices. O que pela proposição 2.3.1 é o mesmo que dizer que $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

Suponha então que o item (3) não vale. Neste caso, existe uma bola B centrada em $f(a)$ tal que $f^{-1}(B)$ não contém nenhuma bola centrada em a . Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolha $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a)$ tal que $f(x_n) \notin B$. A sequência x_n converge para a (por quê?), mas $f(x_n)$ não converge para $f(a)$ (por quê?). □

Observação 2.3.3. Repare como o item 2 se assemelha à definição de continuidade que utiliza argumentos do tipo $\varepsilon - \delta$:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Topologia de Espaços Métricos: releitura

Neste capítulo, vamos fazer uma releitura do que estudamos no capítulo 2, mas desta vez, vamos tentar eliminar o máximo possível os argumentos do tipo “epsilon e delta”. O objetivo é apresentar a topologia dos espaços métricos utilizando a métrica o mínimo possível, de modo a tornar a apresentação dos conceitos mais parecida com os conceitos correspondentes quando trabalhamos com a chamada *topologia geral* (definição 4.2.1).

O conceito mais importante e mais enfatizado nos cursos de topologia é o de *conjunto aberto* (definição 3.4.1). No entanto, o conceito de *vizinhança* (definição 3.1.1) é muito mais fundamental e mais natural, principalmente quando se faz o paralelo entre o ponto de vista da *topologia geral* e a topologia dos espaços métricos. O conceito de vizinhança é muito mais próximo e generaliza muito melhor o que se faz quando se utiliza argumentos com bolas, ou argumentos do tipo “epsilon e delta”, muito comuns quando tratamos de espaços métricos.

3.1 Vizinhanças

Quando falamos de convergência e continuidade nos capítulos anteriores, estávamos de posse de uma métrica. A métrica nos dava a noção de distância que nos permitia falar de “proximidade”. Quando dizemos que x_n converge para x , não estamos de fato interessados nos pontos que estão “longe” de x . Estamos interessados apenas nos que estão “próximos”. De

fato, poderíamos nos restringir apenas a bolas “pequeninas”. Poderíamos nos restringir às bolas de raio $\frac{1}{100 \cdot n}$.

Quando x_n converge para x , é porque se V contém x e que é de certa forma *suficientemente grande*, conterá toda a sequência x_n , exceto para uma quantidade finita de índices n . Esse *suficientemente grande*, no caso de espaços métricos, significa que existe uma bola B centrada em x tal que $B \subset V$. A esses conjuntos *suficientemente grandes*, chamamos de *vizinhanças de x* .

Definição 3.1.1. *Seja X um espaço métrico e $x \in X$. Todo conjunto $V \subset X$ que contém uma bola centrada em x é chamado de vizinhança de x . Denotamos por $\mathcal{V}(x)$ o conjunto de todas as vizinhanças do ponto x .*

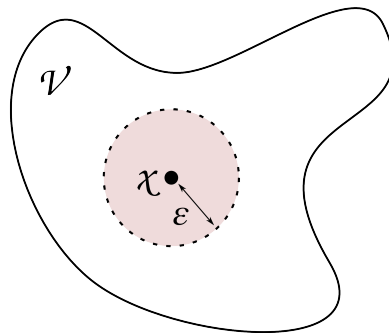


Figura 3.1: O conjunto V é uma vizinhança x pois é “grande” o suficiente para conter uma bola centrada em x .

É imediato que toda bola centrada em x é uma vizinhança de x . Mais do que isso, uma bola qualquer é vizinhança de todos os seus pontos.

Proposição 3.1.2. *Se $B \subset X$ é uma bola em um espaço métrico X . Então,*

$$y \in B \Rightarrow B \in \mathcal{V}(y).$$

Ou seja, uma bola é vizinhança de todos os seus pontos.

Demonstração. Veja a proposição 1.2.2. Ou, para um argumento mais visual, compare as figuras 1.3 e 3.1. $\square$

A seguir, apresentamos algumas propriedades elementares das vizinhanças de um ponto.

Proposição 3.1.3. *Seja X um espaço métrico, e $x \in X$. Então valem as seguintes afirmações sobre a família $\mathcal{V}(x)$ de todas as vizinhanças de x :*

1. *Se $A \in \mathcal{V}(x)$ e $A \subset B$, então $B \in \mathcal{V}(x)$.*
2. *A interseção de duas vizinhanças de x também é uma vizinhança de x . Ou seja, se $A, B \in \mathcal{V}(x)$, então $A \cap B \in \mathcal{V}(x)$.*
3. *Se $A \in \mathcal{V}(x)$ então existe $B \subset A$ tal que $x \in B$ e B é vizinhança de todos os seus pontos.*

Demonstração. O item (1) é imediato.

O item (2) é imediato do fato que as bolas centradas em x são totalmente ordenadas. Ou seja, a que tiver o menor raio estará contida em ambos os conjuntos.

O item (3) é uma re-interpretação da proposição 3.1.2. Basta tomar B como sendo uma bola centrada em x contida em A . $\square$

Observação 3.1.4. Das propriedades listadas na proposição 3.1.3, o item (3) é o de interpretação mais difícil. Vamos voltar a discutí-lo no capítulo ???. Uma das implicações do item (3), é a seguinte. Seja $V \in \mathcal{V}(x)$. Suponha que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenhamos uma sequência x_n^n , indexada por n , que converge para x_n . O item (3) da proposição implica que x_n não pode convergir para x , pois todos estarão fora do conjunto B .

Assim, sem a propriedade do item (3), aberrações do tipo

$$x_n^n \not\rightarrow x \qquad x_n \rightarrow x.$$

Quando na verdade esperamos que se $\lim x_n$ existe, então $x_n^n \rightarrow \lim x_n$.

3.2 Continuidade em um Ponto

Usando vizinhanças para expressar continuidade a formulação fica muito simples. O trabalho todo já foi feito na proposição 2.3.2.

Notação. *Seja X um conjunto. Chamamos de partes de X , e denotamos por $\mathcal{P}(X)$ a família formada por todos os subconjuntos de X .*

Se $f : X \rightarrow Y$ e $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(Y)$, escrevemos $f^{-1}(\mathcal{F})$ para indicar a família

$$f^{-1}(\mathcal{F}) = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{F}\}.$$

Proposição 3.2.1. *Sejam X e Y espaços métricos. Então $f : X \rightarrow Y$ é contínua em $a \in X$ se, e somente se,*

$$f^{-1}(\mathcal{V}(f(a))) \subset \mathcal{V}(a).$$

Demonstração. Tome $V \in \mathcal{V}(f(a))$. Então existe uma bola B centrada em $f(a)$, tal que $B \subset V$. Pela proposição 2.3.2, $f^{-1}(B) \in \mathcal{V}(a)$. Portanto, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$.

Por outro lado, se $f^{-1}(\mathcal{V}(f(a))) \subset \mathcal{V}(a)$, teremos que em particular $f^{-1}(B) \in \mathcal{V}(a)$ para toda bola centrada em $f(a)$. Ou seja, $f^{-1}(B)$ contém uma bola centrada em a para toda bola B centrada em $f(a)$. Novamente, pela proposição 2.3.2, isso implica que f é contínua em a . $\square$

Em se tratando de espaços métricos, tanto a definição 2.2.1, quanto qualquer uma de suas formulações equivalentes dadas pelas proposições 2.3.2 e 3.2.1, poderiam ser utilizadas como a definição de continuidade em um ponto. Poderíamos ter escolhido um caminho diferente e adotado uma definição de continuidade no estilo

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Cada caracterização enfatiza um aspecto diferente do fenômeno de continuidade. É importante que não nos acomodememos a apenas uma delas, mas que escolhamos a mais adequada à situação.

3.3 Base de Vizinhanças

Quando definimos o que seriam as vizinhanças de um ponto $x \in X$ de um espaço métrico, utilizamos as bolas centradas em x . Chamando de $\mathcal{B}$ a família das bolas centradas em x , temos que

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{V}(x).$$

Além do mais, todo conjunto $V \in \mathcal{V}(x)$ contém um conjunto $B \in \mathcal{B}$. Ou seja, a sub-família $\mathcal{B}$ determina quais são as vizinhanças de x . Poderíamos ter nos restringido às bolas de raio $\frac{1}{n}$ para compor a família $\mathcal{B}$. As vizinhanças “geradas” por essa nova família $\mathcal{B}$ seriam exatamente as mesmas.

Definição 3.3.1. *Seja $\mathcal{V}(x)$ a família de todas as vizinhanças de $x \in X$, onde X é um espaço métrico. Então, dizemos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}(x)$ é uma base de vizinhanças de x quando*

$$\mathcal{V}(x) = \{V \subset X \mid \exists B \in \mathcal{B}, \text{ com } B \subset V\}$$

Proposição 3.3.2. *Seja X um espaço métrico e $x \in X$. Seja também $\mathcal{B}$ uma base de vizinhanças de x . Então, uma sequência x_n converge para x se, e somente se, para todo $B \in \mathcal{B}$ existir $N = N(B) \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in B.$$

Demonstração. É óbvio que se existe tal $N = N(B) \in \mathbb{N}$ para todo $B \in \mathcal{B}$, então para $V \in \mathcal{V}(x)$, podemos tomar $N(V) = N(B)$ para qualquer $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset V$. Será verdadeiro que

$$n \geq N(V) = N(B) \Rightarrow x_n \in B \subset V.$$

Portanto, $x_n \rightarrow x$. □

Proposição 3.3.3. *Sejam X e Y espaços métricos e $f : X \rightarrow Y$. Sejam $a \in X$ e $\mathcal{B}$ uma base de vizinhanças de $f(a)$. Então, f é contínua em a se, e somente se,*

$$f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{V}(a).$$

Demonstração. Pela proposição 3.2.1, basta mostrar que

$$f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{V}(a) \Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{V}(f(a))) \subset \mathcal{V}(a).$$

Uma direção é óbvia, já que $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}(f(a))$. Suponha então que $V \in \mathcal{V}(f(a))$. Neste caso, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset V$. Assim, $f^{-1}(V) \supset f^{-1}(B) \in \mathcal{V}(a)$. Portanto, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$. □

A aplicação mais imediata da proposição é a equivalência entre as seguintes afirmações, que são definições alternativas para a continuidade de f no ponto a :

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x, a) < \frac{1}{m} \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \frac{1}{n}.$$

3.4 Conjuntos Abertos

Um conjunto aberto simplesmente um conjunto que é vizinhança de todos os seus pontos. A proposição 1.2.2 mostra que em um espaço métrico, todas as bolas são abertas. Por isso, muitos autores usam a expressão *bola aberta* para se referirem ao que neste livro definimos como *bola*. Ainda vamos formalizar isso melhor, mas os conjuntos abertos caracterizam toda a topologia do espaço, haja visto que a família

$$\mathcal{A}_x = \{V \in \mathcal{V}(x) \mid V \text{ é aberto}\}$$

é uma base de vizinhanças de x para todo $x \in X$. (veja o item (3) da proposição 3.1.3)

Conhecendo todos os conjuntos abertos, sabemos quem são as sequências convergentes, quais funções são ou não contínuas e, conforme já mencionado, quais são as vizinhanças de um ponto.

Definição 3.4.1. *Seja X um espaço métrico. Dizemos que um conjunto $A \subset X$ é aberto quando satisfaz*

$$x \in A \Rightarrow A \in \mathcal{V}(x).$$

Definição 3.4.2. *Dado um espaço métrico (X, d) , a topologia de X induzida por d , denotada por τ_X é a família de todos os abertos de X . Isto é,*

$$\tau_X = \{A \subset X \mid A \text{ é aberto}\}.$$

Proposição 3.4.3. *Seja X um espaço métrico e $x \in X$. Então a família*

$$\mathcal{A}_x = \mathcal{V}(x) \cap \tau_X$$

é uma base de vizinhanças de x .

Demonstração. Basta notar que, chamando de $\mathcal{B}$ a coleção de todas as bolas centradas em x ,

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_x \subset \mathcal{V}(x).$$

Como $\mathcal{B}$ é uma base de vizinhanças de x , qualquer família “entre” $\mathcal{B}$ e $\mathcal{V}(x)$ também é uma base de vizinhanças de x . (porquê?) $\square$

Proposição 3.4.4. *Seja X um espaço métrico. Então, τ_X tem as seguintes propriedades:*

1. $\emptyset, X \in \tau_X$.

2. Se $A, B \in \tau_X$, então $A \cap B \in \tau_X$.
3. Se $A_\lambda \in \tau_X$ para uma família qualquer de índices $\lambda \in \Lambda$, então $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau_X$.

Demonstração. Para o item (1), é fácil ver que X é vizinhança de qualquer ponto $x \in X$. Para o conjunto vazio ...note que todos os elementos do conjunto vazio satisfazem a propriedade que você quiser. Neste caso, a propriedade de terem $\emptyset$ como vizinhança. ;-)

O item (2) é consequência do item (2) da proposição 3.1.3. Ou seja, se $x \in A \cap B$, como A e B são vizinhanças de x , então $A \cap B$ também é vizinhança de x . Assim, $A \cap B$ é vizinhança de todos os seus pontos.

Do mesmo modo, o item (3) é consequência do item (1) da proposição 3.1.3. $\square$

Proposição 3.4.5. *Seja X um espaço métrico e $A \subset X$. Então, são equivalentes:*

1. O conjunto A é aberto.
2. O conjunto A pode ser escrito como uma união de bolas.

Demonstração. Se A é aberto, então para cada ponto $x \in A$ existe uma bola B_x centrada em x e contida em A . Desta forma, é evidente que

$$A = \bigcup_{x \in A} B_x.$$

Ou seja, A é uma união de bolas.

Por outro lado, sabemos que as bolas são conjunto abertos. Assim, qualquer conjunto que seja uma união de bolas é, pelo item (3) da proposição 3.4.4, um conjunto aberto. $\square$

Sequências e Convergência com Abertos

Dado um espaço métrico X . Podemos caracterizar o fenômeno de convergência em termos de sua topologia τ_X ? De fato, para dizer se $x_n \in X$ converge ou não para um certo $x \in X$, de acordo com a proposição 3.3.2, precisamos apenas conhecer uma base de vizinhanças de x qualquer. Sabemos que os abertos que contém x formam uma base de vizinhanças de x . Sendo assim, concluímos que x_n converge para x se, e somente se, para todo aberto A que contenha o ponto x existir $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in A.$$

3.5 Continuidade em Todo Ponto

Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ entre espaços métricos X e Y é contínua quando é contínua em todo ponto do seu domínio. Se considerarmos $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$, a função será contínua em $x \in X$ quando f^{-1} levar vizinhanças de $f(x)$ em vizinhanças de x . Sendo assim, se $A \subset Y$ for um conjunto aberto (vizinhança de todos os seus pontos) e f for contínua, então $f^{-1}(A)$ será também vizinhança de todos os seus pontos. Ou seja, se f é contínua, então $f^{-1}(\tau_Y) \subset \tau_X$. Vamos formalizar isso.

Proposição 3.5.1. *Seja X e Y um espaço métrico, e $f : Y \rightarrow X$ uma função qualquer. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. A função f é contínua em todo ponto de X .
2. Vale que $f^{-1}(\tau_Y) \subset \tau_X$.

Demonstração. Seja $A \in \tau_Y$. Então, para todo $x \in f^{-1}(A)$ temos que A é vizinhança de $f(x)$, e pela proposição 3.2.1, $f^{-1}(A)$ é vizinhança de x . Ou seja, $f^{-1}(A)$ é aberto.

Por outro lado, sabemos pela proposição 3.4.3 que para todo $x \in X$,

$$\mathcal{A}_{f(x)} = \mathcal{V}(f(x)) \cap \tau_Y$$

é uma base de vizinhanças de $f(x)$. Pelo item (2), temos que $f^{-1}(\mathcal{A}_{f(x)})$ é aberto e obviamente contém x . Ou seja, $f^{-1}(\mathcal{A}_{f(x)}) \in \mathcal{V}(x)$. Pela proposição 3.3.3, segue que f é contínua em x . $\square$

E o que significa então dizer que $f : X \rightarrow Y$ é bijetiva, contínua e sua inversa é contínua? O fato de ser uma bijeção implica que podemos identificar os pontos de X com os pontos de Y . O fato de ser contínua com inversa contínua significa que com essa identificação as estruturas topológicas τ_X e τ_Y também são identificadas. Esse tipo de função f é chamada de *homomorfismo*.

Definição 3.5.2. *Se X e Y são espaços métricos, então uma função $f : X \rightarrow Y$ é chamada de homomorfismo quando é bijetiva, contínua com inversa também contínua.*

Parte II

Topologia Geral

Motivação e Definições

4.1 Motivação

Esta seção não é formal. Nosso propósito aqui é apenas dar motivação para as definições e propriedades que serão estudadas nas seções seguintes.

Nossa motivação é obviamente o estudo que acabamos de fazer de *espaços métricos*. Devidamente motivados por tudo o que já estudamos na primeira parte do livro, vamos abstrair o que seria a essência dos fenômenos de *convergência* e *continuidade*. Uma alternativa seria associar ao espaço X em questão uma estrutura que identificasse, para cada um dos pontos $x \in X$, quais são e quais não são as sequências que convergem para x . Uma deficiência desta abordagem está na dependência para com o conjunto dos números naturais, que indexam as tais sequências. Futuramente, veremos que uma solução alternativa é o uso de “redes” em substituição ao de sequência. Esta abordagem será feita no capítulo ??.

Outra maneira seria associar a X uma estrutura que indicasse, quais são os conjuntos que formam as “vizinhanças” de cada ponto de X . As vizinhanças de $x \in X$ indicam o que está “próximo” de x . O ponto x estaria próximo de um conjunto $B \in X$ quando para todo $V \in \mathcal{V}(x)$, tivermos $B \cap V \neq \emptyset$. Diremos que $x_n \in X$ converge para x quando para todo $\Gamma \subset \mathbb{N}$ com $\#\Gamma = \infty$, os conjuntos

$$B_\Gamma = \{x_n \mid n \in \Gamma\}$$

estiverem “próximos” de x . A palavra “próximo” está entre aspas porque esse não é o termo matemático utilizado. O correto seria dizer que x está no *fecho* de B (definição ??), ou que é um ponto de *aderência* de B . (Porque não utilizamos $n \geq N$ para todo $N \in \mathbb{N}$ ao invés de $n \in \Gamma$?)

As famílias $\mathcal{V}(x)$, das vizinhanças de $x \in X$ deveriam satisfazer as propriedades listadas na proposição 3.1.3. O item (1) não gera grandes polêmicas. Para que um conjunto esteja próximo do ponto, teria que interceptar todas as suas vizinhanças, portanto, acrescentar conjuntos maiores não modificaria a “converência”. Talvez o nome “vizinhança” não seja realmente uma boa escolha, já que sugere que sejam conjuntos pequenos. Não faz diferença no entanto, já que nossos argumentos são do tipo

intercepta todas as vizinhanças, por menores que sejam.

Esse tipo de argumento poderia ser restrito às vizinhanças “pequenas”, mas não faria diferença, e seria complicado dizer o que é um conjunto “grande demais”. Veja a definição de *base de vizinhanças de um ponto* (3.3.1) e a proposição 3.3.2). Assim, o item (1) se presta mesmo a maximizar a família $\mathcal{V}(x)$ de modo que o fenômeno de convergência não seja alterado.

O item (2) também serve ao mesmo propósito de maximizar a família $\mathcal{V}(x)$. Isso porque, se para $U, V \in \mathcal{V}(x)$, existem $N_U, N_V \in \mathbb{N}$ tais que

$$\begin{aligned} n \geq N_U &\Rightarrow x_n \in U \\ n \geq N_V &\Rightarrow x_n \in V \end{aligned}$$

então, fazendo $N_{U \cap V} = \max\{N_U, N_V\}$,

$$n \geq N_{U \cap V} \Rightarrow x_n \in U \cap V.$$

Assim, se U e V são vizinhanças de x , considerando ou não o conjunto $U \cap V$ à família do que chamamos de vizinhanças de x , o conceito de converência não mudaria. O que não fosse convergente continuaria não convergente, e o que fosse convergente permaneceria convergente.

O item mais difícil de aceitar da proposição 3.1.3, é o item (3). Como já mencionamos anteriormente, na observação 3.1.4, este item serve para garantir que se $x_m^n \rightarrow x_n$, onde $x_m^n \notin V$ para alguma vizinhança de $x \in X$, então não é possível acontecer que $x_n \rightarrow x$. É equivalente a dizer que os abertos que contém $x \in X$ formam uma base de vizinhanças de X . É o que garante que se conhecermos os abertos, conheceremos toda a topologia.

A opção que vamos adotar, ao menos por enquanto, é a de definir a topologia definindo o que seriam os conjuntos abertos. Para um conjunto X , escolhemos $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ de modo que τ tenha as propriedades listadas na proposição 3.4.4. Essas propriedades são semelhantes às correspondentes para “vizinhanças”. Dizer que $X \in \tau$ é o mesmo que dizer que todo ponto tem ao menos uma vizinhança (aberta).

4.2 Definição

Agora que, na medida do possível, devidamente motivados, vamos definir o que se chama de ser uma topologia em um conjunto X qualquer.

Definição 4.2.1 (Espaço Topológico). *Seja X um conjunto qualquer. Dizemos que uma família $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ define uma topologia no espaço X , ou que (X, τ) é um espaço topológico, quando τ satisfaz:*

1. $\emptyset, X \in \tau$.
2. Se $A, B \in \tau$, então $A \cap B \in \tau$.
3. Se $A_\lambda \in \tau$ para uma família qualquer de índices $\lambda \in \Lambda$, então $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau$.

Os subconjuntos $A \subset X$ tais que $A \in \tau$ são chamados de abertos do espaço topológico (X, τ) . Por um abuso de notação, quando conveniente, dizemos que X é um espaço topológico.

A topologia de um espaço métrico, definida em 3.4.2 é de fato uma topologia no sentido da definição 4.2.1 pela proposição 3.4.4. Vejamos outros exemplos de topologia.

Exemplos

Exemplo 4.2.2 (Topologia Discreta). Dado um conjunto qualquer X , $(X, \mathcal{P}(X))$ é um espaço topológico. Esta topologia é induzida, por exemplo, pela métrica discreta mencionada no exemplo 1.3.2.

Exemplo 4.2.3 (Topologia Trivial (caótica)). Dado um conjunto qualquer X , $(X, \{\emptyset, X\})$ é um espaço topológico. Se o conjunto X tiver mais do que um elemento, essa topologia nunca é dada (induzida) por uma métrica, pois não satisfaz a proposição 1.2.4.

Exemplo 4.2.4 (Topologia da Continuidade Inferior). Considere os números reais $\mathbb{R}$ e a seguinte família de subconjuntos de $\mathbb{R}$

$$\tau = \{(\alpha, \infty) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Neste caso, $(\mathbb{R}, \tau)$ é um espaço topológico. Assim como no exemplo 4.2.3, essa topologia também não é induzida por uma métrica.

Do mesmo modo, existe a topologia da *Continuidade Superior*, dada por

$$\tau = \{(-\infty, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Exemplo 4.2.5 (Topologia Inicial). Seja X um conjunto e (Y, τ_Y) um espaço topológico. Considere uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ qualquer. Então $(X, f^{-1}(\tau_Y))$ é um espaço topológico.

4.3 Vizinhanças e Base de Vizinhanças de um Ponto

Assim como fizemos para espaços métricos, podemos definir para um espaço topológico (X, τ) , o que é para cada ponto $x \in X$, a família de todas as suas vizinhanças.

Definição 4.3.1. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Dado $x \in X$, uma vizinhança aberta de x é um aberto $A \in \tau$ que contém o ponto x . Uma vizinhança de x é qualquer conjunto que contenha uma vizinhança aberta de x . Denotamos por $\mathcal{V}(x)$ a família de todas as vizinhanças de x .*

Em um espaço topológico qualquer, as vizinhanças de um ponto possuem as mesmas propriedades que as descritas na proposição 3.1.3 para o caso de espaços métricos.

Proposição 4.3.2. *Seja X um espaço topológico, e $x \in X$ um ponto de X . Então valem as seguintes afirmações sobre a família $\mathcal{V}(x)$ de todas as vizinhanças de x :*

1. *Se $A \in \mathcal{V}(x)$ e $A \subset B$, então $B \in \mathcal{V}(x)$.*
2. *A interseção de duas vizinhanças de x também é uma vizinhança de x . Ou seja, se $A, B \in \mathcal{V}(x)$, então $A \cap B \in \mathcal{V}(x)$.*
3. *Se $A \in \mathcal{V}(x)$ então existe $B \subset A$ tal que $x \in B$ e B é vizinhança de todos os seus pontos.*

Demonstração. Todos os itens são evidentes da definição de vizinhança. O item (2) é consequência do fato de τ ser fechado por interseção finita. $\square$

Assim como no caso de espaços métricos, podemos caracterizar os conjuntos abertos como sendo aqueles que são vizinhanças de todos os seus pontos.

Proposição 4.3.3. *Dado um espaço topológico X , um conjunto $A \subset X$ é aberto se, e somente se, for vizinhança de todos os seus pontos.*

Demonstração. Pela definição de vizinhança, um conjunto aberto é evidentemente vizinhança de todos os seus pontos. Suponha então que $A \subset X$ é vizinhança de todos os seus pontos. Vamos mostrar que A é aberto.

Por hipótese, para cada $a \in A$ existe um aberto U_a tal que $a \in U_a \subset A$. Neste caso,

$$A = \bigcup_{a \in A} U_a.$$

Como A é uma união de abertos U_a , temos que A também é aberto. $\square$

Definição 4.3.4. *Seja X um espaço topológico e $x \in X$ um ponto qualquer de x . Uma família de vizinhanças de x , $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}(x)$ é chamada de base de vizinhanças de x quando para toda vizinhança $V \in \mathcal{V}(x)$ existir $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset V$.*

Agora que definimos o que vêm a ser as vizinhanças de um ponto, mesmo não tendo uma métrica, podemos definir convergência de sequências.

Definição 4.3.5. *Seja X um espaço topológico e $x_n \in X$ uma sequência de elementos de X . Dizemos que x_n converge para $x \in X$, quando para toda vizinhança $V \in \mathcal{V}(x)$ existir $N = N(V) \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in V.$$

Novamente, como no caso métrico, para saber se uma sequência $x_n \in x$ converge para $x \in X$, basta verificar a condição da definição 4.3.5 para uma base de vizinhanças de x . Também, como no caso dos espaços métricos, dado $x \in X$, a família das vizinhanças abertas de x formam uma base para $\mathcal{V}(x)$.

4.4 Continuidade em um Ponto

A essas alturas, o leitor já sabe o que será tratado neste capítulo. Assim como fizemos para os espaços métricos no capítulo 3.2, vamos falar sobre a continuidade de aplicações entre espaços topológicos. O leitor deve comparar a definição 4.4.1 e a proposição 3.2.1, que caracteriza continuidade em um ponto em espaços métricos.

Definição 4.4.1. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação qualquer entre X e Y . Para $x \in X$, dizemos que f é contínua em x quando*

$$f^{-1}(\mathcal{V}(f(x))) \subset \mathcal{V}(x).$$

Ou seja, quando a imagem inversa de toda vizinhança de $f(x)$ for uma vizinhança de x .

Em uma formulação mais semelhante aos argumentos do estilo $\varepsilon - \delta$, a definição de continuidade fica assim

Para todo $V \in \mathcal{V}(f(x))$ existe $U \in \mathcal{V}(x)$ tal que

$$y \in U \Rightarrow f(y) \in V.$$

Como no caso de espaços métricos, basta verificar a condição da definição para uma base de vizinhanças de x .

Proposição 4.4.2. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$. Sejam $x \in X$ e $\mathcal{B}$ uma base de vizinhanças de $f(x)$. Então, f é contínua em x se, e somente se,*

$$f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{V}(x).$$

Demonstração. Se $V \in \mathcal{V}(f(x))$, então existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset V$. Portanto, $f^{-1}(V) \supset f^{-1}(B) \in \mathcal{V}(x)$. Portanto, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x)$. Como V é um elemento arbitrário de $\mathcal{V}(f(x))$, temos que

$$f^{-1}(\mathcal{V}(f(x))) \subset \mathcal{V}(x).$$

□

4.5 Continuidade

Continuidade é um conceito central em topologia. Uma aplicação contínua transporta aspectos topológicos entre os espaços em questão. Dada uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ entre os conjuntos X e Y , podemos ver f^{-1} como uma aplicação

$$f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X).$$

Se (X, τ_X) e (Y, τ_Y) são espaços topológicos e f é contínua em $x \in X$, podemos olhar para f^{-1} restrita a $\mathcal{V}(f(x))$ como sendo uma aplicação

$$f^{-1} : \mathcal{V}(f(x)) \rightarrow \mathcal{V}(x).$$

A proposição a seguir demonstra que quando f é contínua em todo ponto de X , então a restrição de f^{-1} a τ_Y pode ser vista como uma aplicação

$$f^{-1} : \tau_Y \rightarrow \tau_X.$$

Proposição 4.5.1. *Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação de X em Y . Neste caso, são equivalentes:*

1. *A função f é contínua em todo ponto $x \in X$.*
2. *Para todo aberto $A \in \tau_Y$, $f^{-1}(A) \in \tau_X$.*

Demonstração. Se f é contínua em todo ponto, então, dado $A \in \tau_Y$, temos que para todo ponto $x \in f^{-1}(A)$, $f(x) \in A$. Ou seja, $A \in \mathcal{V}(f(x))$. Pela continuidade de f no ponto x , temos que $f^{-1}(A) \in \mathcal{V}(x)$. Acabamos de mostrar que $f^{-1}(A)$ é vizinhança de todos os seus pontos. Pela proposição 4.3.3, $f^{-1}(A)$ é um aberto de X . $\square$

Definição 4.5.2 (Função Contínua). *Dizemos que uma função $f : X \rightarrow Y$ entre os espaços topológicos (X, τ_X) e (Y, τ_Y) é contínua quando é contínua em todo ponto $x \in X$. Ou, equivalentemente, quando $f^{-1}(\tau_Y) \subset \tau_X$.*

Homeomorfismos

Para dois conjuntos X e Y , uma bijeção $f : X \rightarrow Y$ identifica cada ponto de X a um único ponto de Y e vice-versa. Se X e Y forem espaços topológicos, f for contínua e sua inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ também for contínua, então também serão identificados cada aberto de X com um único aberto de Y e vice-versa. Tudo o que puder ser dito sobre a topologia de X poderá ser afirmado sobre a topologia de Y através da identificação dada por f .

Definição 4.5.3 (Homeomorfismo). *Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que uma aplicação*

$$f : X \rightarrow Y$$

é um homeomorfismo de X em Y quando f for bijetiva, contínua e sua inversa f^{-1} também for contínua.

Quando existe um homeomorfismo entre dois espaços topológicos, dizemos que estes espaços são homeomorfos.

Aplicação Aberta

Com uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ entre espaços topológicos, podemos tentar relacionar as topologias de (X, τ_X) e (Y, τ_Y) . Se f for um homeomorfismo, sabemos que X e Y possuem exatamente a mesma topologia quando os pontos de X são identificados com os de Y através de f . Se f for uma bijeção contínua, podemos identificar X com o subconjunto Y , como conjuntos.

Com esta identificação, teremos que $\tau_Y \subset \tau_X$. Uma outra propriedade que f pode ter, que ajudaria a relacionar os espaços X e Y é a de levar abertos de X em abertos de Y . Neste caso, dizemos que f é uma *aplicação aberta*.

Definição 4.5.4. *Seja $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ uma aplicação entre os espaços topológicos X e Y . Dizemos que f é uma aplicação aberta quando $f(\tau_X) \subset \tau_Y$.*

Um homeomorfismo é uma bijeção contínua e aberta. Nossa motivação para a definição de *aplicação aberta* é simplesmente imaginar, ignorando o fato de que f pode nem mesmo ser bijetiva, o que seria necessário para que f^{-1} seja contínua. Mais adiante, veremos maneiras de se transportar topologias de um espaço topológico a um conjunto qualquer através de aplicações entre eles. Quando temos uma bijeção entre um espaço topológico e um conjunto qualquer, fica fácil transportar a topologia de um para o outro. Adiantando um pouco as coisas, imagine que $f : X \rightarrow Y$ é uma sobrejeção aberta e contínua do espaço topológico X no espaço topológico Y . Podemos definir o conjunto

$$\tilde{X} = \{f^{-1}(y) \mid y \in Y\},$$

que nada mais é do que “agrupar” todos os elementos de X que têm a mesma imagem. A projeção natural de X em $\tilde{X}$ é dada por

$$\begin{array}{ccc} \pi : X & \rightarrow & \tilde{X} \\ x & \mapsto & f^{-1}(f(x)) \end{array}.$$

A projeção leva um elemento $x \in X$ na “classe” formada por todos os elementos de X que tem, por f , a mesma imagem que x . A aplicação f pode ser fatorada, de modo que o seguinte diagrama é comutativo (ou seja, $f = \tilde{f} \circ \pi$):

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ \tilde{X} & & \end{array}$$

Basta definir $\tilde{f}(f^{-1}(y)) = y$. Agora, $\tilde{f}$ é uma bijeção. Faria sentido esperar que a topologia de X pudesse ser transportada para $\tilde{X}$, de modo que $\tilde{f}$ se tornasse um homeomorfismo entre Y e $\tilde{X}$. Trataremos desse tipo de topologia no capítulo 6.

Assim como podemos falar em *continuidade em um ponto*, podemos também definir o que seria dizer que $f : X \rightarrow Y$ é aberta em $x \in X$. Assim como no caso de continuidade, a definição fica melhor se usarmos *vizinhanças de x* ao invés de abertos.

Definição 4.5.5. *Seja $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ uma aplicação entre os espaços topológicos X e Y . Dizemos que f é uma aplicação aberta em $x \in X$ quando $f(\mathcal{V}(x)) \subset \mathcal{V}(f(x))$.*

CAPÍTULO 5

Construindo Topologias

5.1 Relembrando Espaços Métricos

xxx

5.2 Sub-Base

xxx

5.3 Bases

xxx

5.4 Critérios de Convergência e Continuidade

xxx

CAPÍTULO 6

Topologias Derivadas de Outras Topologias

6.1 Topologia de um Sub-Espaço

xxx

6.2 Topologia Produto

xxx

6.3 Topologia Inicial

xxx

6.4 Topologia Final

xxx

6.5 Topologia Quociente

xxx