

Topologia Geral de Vários Ângulos

André Caldas de Souza
and YOU! :-)

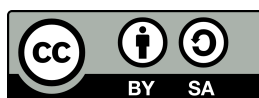
12 de abril de 2010

Este Livro é Livre

Este livro pode ser copiado à vontade. Se você recebeu em formato digital, fique à vontade para copiá-lo e comparilhá-lo quantas vezes quiser. Você pode também imprimí-lo e copiá-lo o tanto que quiser. Claro que é sempre importante pensar na natureza e no impacto ambiental. Procure não desperdiçar recursos. ;-)

Quer imprimir e vender este livro para os seus colegas? Fique à vontade, também! Você é dono de uma editora e quer imprimir sua própria versão, vender e ficar rico com esse livro sem precisar pagar nenhum tostão em direitos autorais? Pois na minha opinião, se você o fizer estará contribuindo para um mundo melhor. Uma das poucas restrições é que você não tire dos outros essa liberdade que lhe foi concedida. Se você passar esse livro pra frente, não poderá proibir aquele que o recebeu de fazer o mesmo.

Este livro está licenciado sob os termos da licença “Creative Commons Attribution Share Alike 3.0”. Os termos estão disponíveis na internet através do endereço <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.



A versão mais atual deste livro pode ser encontrada na internet no endereço <http://ourproject.org/projects/topologia-geral/>. Lá também podem ser encontrados os arquivos $\text{\LaTeX}$, que podem ser alterados e usados para criar sua própria versão do livro.

Sobre o OurProject.org

O site onde está hospedado o projeto deste livro é um repositório de conteúdos livre. Qualquer um que queira produzir conteúdos livres – como

livros, poesias, músicas, vídeos e etc. – pode utilizá-lo como ferramenta. Ah... o site sobrevive com doações. ;-)

Endereço: <http://ourproject.org/>

Faz algum tempo que eu procurava um lugar que pudesse hospedar o projeto de um livro livre. Já estava pensando em tentar fazer alguma coisa nesse estilo dentro do próprio departamento de matemática da UnB. Felizmente encontrei o OurProject e isso não será mais necessário.

Por Quê?

Eu (André Caldas) não acredito que “coletar taxas” seja a melhor maneira de se sobreviver da produção cultural. Na minha opinião, as pessoas devem receber para produzir, e não produzir na esperança de que vão “coletar taxas” relativas ao direito autoral para o resto da vida. Eu, por exemplo, atualmente sou estudante de doutorado da UnB e recebo uma bolsa de estudo da CAPES. Ou seja, a sociedade já me oferece provisões para que eu possa me dedicar às minhas atividades acadêmicas que incluem sem dúvida a produção deste livro.

Não vejo sentido em um professor de uma universidade pública, que já recebe um salário do governo para que produza conhecimento, ter monopólios sobre o fruto do seu trabalho. Vejo menos sentido ainda quando esse professor vende tal monopólio para ser explorado. Perceba que isso não é uma crítica ao lucro ou à exploração da produção científica. É uma crítica ao monopólio sobre os direitos de uso daquilo que foi produzido com dinheiro público. Não faz sentido que a sociedade faça esse tipo de investimento e depois não possa ter acesso ao que foi produzido. Livros é o menor dos problemas. Vemos que pesquisas para o desenvolvimento de medicamentos ou qualquer outra coisa que vá melhorar a qualidade de vida da população, como melhoria na alimentação e acesso ao lazer, são feitas com dinheiro público em parceria com instituições privadas de modo que a sociedade acaba sendo privada de seus frutos. Não acredito que seja errado fazer parceria com instituições privadas. O que não se pode é privar a sociedade dos frutos do trabalho no qual investiu. Vemos instituições de pesquisa se valerem de recursos públicos durante as pesquisas e depois correrem atrás de registros de patentes e coisas do tipo que servem apenas ao propósito de privar a sociedade dos frutos dessa mesma pesquisa.

Se o governo, por exemplo, a uns 10 anos atrás tivesse começado a financiar a produção de livros e exigisse que o fruto desse trabalho fosse verdadeiramente livre (como é este livro), hoje não faríamos licitações para a “compra” de livros; faríamos uma licitação para a impressão e a distribuição

desses livros. Falta visão de longo prazo. Deveríamos investir na produção de livros livres. O autor deve sim receber por seu trabalho. Só que deve receber enquanto faz o trabalho, e não depois através do recolhimento de taxas e de mecanismos de opressão, como os que apreendem máquinas de fotocópia nas universidades.

Tenho vários amigos que fazem cópias de muitos livros. Sempre lembro a eles que quando virarem autores não devem “virar a casaca” e começar a perseguir os que fazem cópias. Gostaria de fazer o mesmo pedido ao leitor! :-)

Brasília, 11 de abril de 2010,
André Caldas

Prefácio

Os livros que tratam do assunto *topologia* parecem se dividir em duas categorias:

- Começam com definições abstratas e pouco motivadas.
- Tratam *apenas* de espaços métricos.

Os espaços métricos são sem dúvida a melhor motivação para o estudo da *topologia geral*. No entanto, existem muitos conceitos, como os de *sequência de Cauchy*, *espaço completo* e *continuidade uniforme*, que não são conceitos topológicos. O que acontece é que os textos que tratam de topologia dos espaços métricos dão muita ênfase a esses conceitos, à *equivalência de métricas*, ao *completamento de espaços*, à *metrizabilidade de uma topologia*, e por aí vai. O fato é que dessa forma não se tem um curso de *topologia*, tem-se um curso de *espaços métricos*.

Por outro lado, sem falar de espaços métricos é muito difícil dar alguma motivação para o que venha a ser uma *topologia*. Assim, neste livro o que foi feito foi uma introdução rápida aos espaços métricos sem se fazer nenhuma menção a questões que não fossem puramente topológicas. Falamos de bolas, de convergência e de continuidade. A idéia é a de se fazer uma transição entre as formulações que enfatizam mais a métrica do espaço até chegar a formulações que dependam apenas da topologia.

Um outro diferencial deste livro está na busca por maneiras alternativas de se olhar para os fenômenos topológicos. Em geral os conjuntos abertos recebem atenção demasiada. Por exemplo, quando estudamos análise funcional, estamos bastante interessados na continuidade de operadores lineares em topologias que são invariantes por translações. Neste caso a continuidade se resume à continuidade na origem. Quando consideramos a continuidade em um único ponto do espaço, a preocupação em demonstrar que determinados conjuntos são *abertos* é um exagero desnecessário. Deveríamos nos preocupar se são ou não *vizinhanças* de 0. A intenção é que o leitor consiga identificar maneiras alternativas que melhor se adaptem ao

fenômeno que está sendo analisado. Para um determinado caso, talvez o melhor seja considerar *abertos*, talvez *vizinhanças*, *redes*, *sequências*, *fechados*, *filtros* e etc.

Sumário

Este Livro é Livre	i
Prefácio	iv
Sumário	vi
I Espaços Métricos	1
1 Definição e Propriedades	2
1.1 Definição	2
1.2 Propriedades Elementares	4
1.3 Exemplos	7
2 Topologia Usando uma Métrica	9
2.1 Seqüências e Convergência	9
2.2 Continuidade	11
2.3 Topologia com Bolas	12
3 Topologia de Espaços Métricos: releitura	14
3.1 Vizinhanças	14
3.2 Continuidade em um Ponto	16
3.3 Base de Vizinhanças	17
3.4 Conjuntos Abertos	18
3.5 Continuidade em Todo Ponto	20
II Topologia Geral	22

Parte I

Espaços Métricos

Definição e Propriedades

Vamos descrever (definir) o que se entende por *espaço métrico* (definição 1.1.1), e estudar propriedades desses espaços que nos motivarão a definir o conceito mais geral de espaço topológico (definição ??).

Os conhecimentos adquiridos neste capítulo serão importantes para que o leitor possa ter exemplos concretos e também motivação suficiente para reconhecer a utilidade e aceitar com naturalidade os conceitos que serão apresentados nos capítulos seguintes.

1.1 Definição

Um espaço topológico é um conjunto X , munido de uma métrica $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$. A métrica faz com que esteja definida uma noção de *distância* entre os pontos de X .

Definição 1.1.1 (Métrica). *Seja X um conjunto qualquer. Uma métrica definida sobre X é uma função*

$$\begin{aligned} d : X \times X &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) \end{aligned}$$

que, para todo $x, y, z \in X$, satisfaz

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (*desigualdade triangular*)

Dizemos que (X, d) é um espaço métrico. Em geral, por um abuso de linguagem, quando a métrica d está subentendida, dizemos que X é um espaço métrico.

Em $\mathbb{R}^n$, a métrica usualmente adotada é a métrica euclidiana, dada por

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2}. \quad (1.1)$$

Onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Em várias situações, o item (1) da definição de métrica, nos permitirá concluir que dois pontos $x, y \in X$ são de fato o mesmo ponto. Basta mostrar que $d(x, y) = 0$. O item (3) é o mais importante da definição. É este item que abstrai a idéia de que a distância entre dois pontos está intimamente relacionada com o “menor caminho” entre dois pontos:

Se existe um caminho A , partindo de x e indo para y , e um caminho B , partindo de y e indo para z , então, a menor distância (ou o ínfimo dos comprimentos dos caminhos partindo de x e indo para z) não é maior do que a soma dos comprimentos de A e B . (figura 1.1)

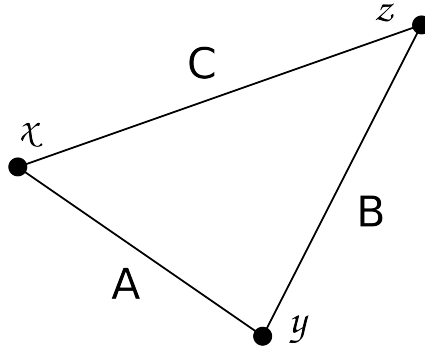
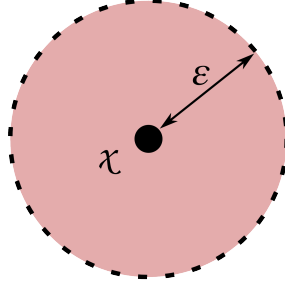


Figura 1.1: Desigualdade triangular: $C \leq A + B$.

Definição 1.1.2 (Bola). Seja (X, d) um espaço métrico, $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. A bola de centro x e raio ε é o conjunto de todos os pontos que distam menos que ε de x :

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Figura 1.2: A bola de centro x e raio ε .

1.2 Propriedades Elementares

Nesta seção, (X, d) é um espaço métrico. As propriedades mais interessantes dos espaços métricos são consequência da desigualdade triangular. Muitas vezes, essas propriedades são mais fáceis de serem visualizadas quando consideramos a distância euclidiana em $\mathbb{R}^2$. Ou seja, quando fazemos um desenho em uma folha de papel. É importante enfatizar que no entanto, os resultados dependem apenas das propriedades das métricas (definição 1.1.1). O desenho melhora a intuição, mas não é uma demonstração.

Todas as proposições deste capítulo são muito simples. O leitor deve ser capaz de completar as demonstrações que afirmam, por exemplo, que basta tomar um certo δ para concluir a demonstração.

Proposição 1.2.1. *Sejam $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$B_{\frac{1}{n}}(x) \subset B_{\varepsilon}(x).$$

Demonstração. Basta tomar n grande o suficiente para que $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$. □

A seguinte proposição, apesar de muito simples, é fundamental para o desenvolvimento de toda a teoria que se seguirá, e é consequência direta da desigualdade triangular.

Proposição 1.2.2. *Sejam $x \in X$, $\varepsilon > 0$ e*

$$y \in B_{\varepsilon}(x).$$

Então, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_{\delta}(y) \subset B_{\varepsilon}(x).$$

Veja a figura 1.3.

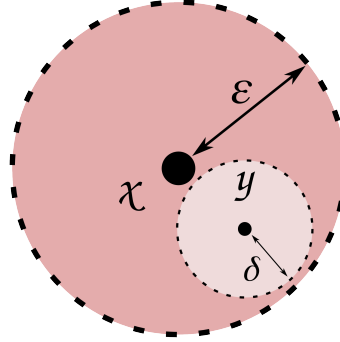


Figura 1.3: Para cada ponto y da bola $B_\varepsilon(x)$, temos uma “bolinha” centrada em y e toda contida em $B_\varepsilon(x)$.

Demonstração. Basta tomar $\delta < \varepsilon - d(x, y)$. Neste caso,

$$\begin{aligned} z \in B_\delta(y) &\Rightarrow d(y, z) < \delta \\ &\Rightarrow d(x, z) < d(x, y) + \delta < \varepsilon \\ &\Rightarrow z \in B_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

□

Proposição 1.2.3. *Sejam $x_1, x_2 \in X$, e $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Então, dado $z \in B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap B_{\varepsilon_2}(x_2)$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$B_\delta(z) \subset B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap B_{\varepsilon_2}(x_2).$$

Veja a figura 1.4.

Demonstração. Pela proposição 1.2.2, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} B_{\delta_1}(z) &\subset B_{\varepsilon_1}(x_1) \\ B_{\delta_2}(z) &\subset B_{\varepsilon_2}(x_2). \end{aligned}$$

Basta portanto tomar qualquer $\delta \leq \min(\delta_1, \delta_2)$.

□

Repare que a proposição “vale” para qualquer número finito de bolas $B_{\varepsilon_1}(x_1), \dots, B_{\varepsilon_n}(x_n)$. Mas não “vale” para um número infinito de bolas.

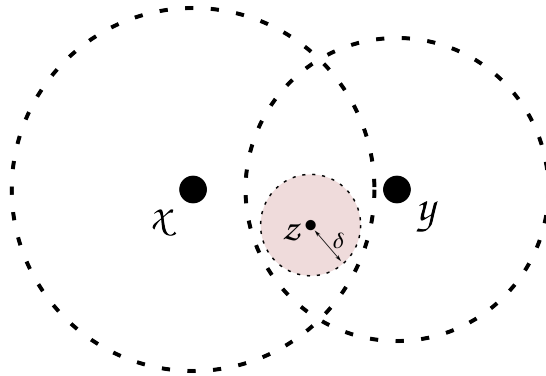


Figura 1.4: Para cada ponto z da interseção $B_{\varepsilon_1}(x) \cap B_{\varepsilon_2}(y)$, temos uma “bolinha” centrada em z e toda contida na interseção.

Proposição 1.2.4. *Sejam $x, y \in X$ dois pontos distintos de X . Então existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$B_{\varepsilon}(x) \cap B_{\varepsilon}(y) = \emptyset.$$

Veja a figura 1.5.

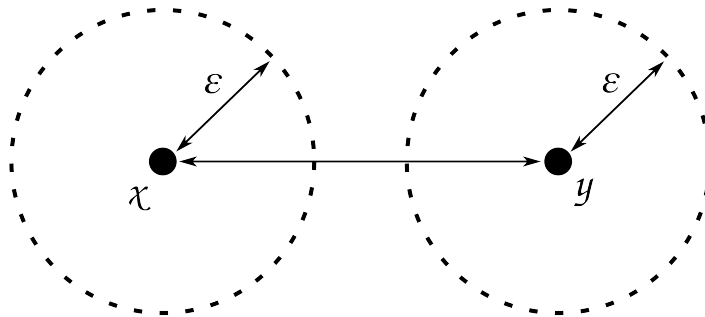


Figura 1.5: Dois pontos distintos x e y podem ser “separados” por bolas disjuntas.

Demonstração. Como $x \neq y$, temos que $d(x, y) > 0$. Basta tomar

$$\varepsilon \leq \frac{d(x, y)}{2}.$$

□

Proposição 1.2.5. *Seja $x \in X$. Então,*

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} B_\varepsilon(x) = \{x\}.$$

Demonstração. Basta mostrar que dado $y \in X$ com $y \neq x$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$y \notin B_\varepsilon(x).$$

Isso segue como um caso particular da proposição 1.2.4. $\square$

1.3 Exemplos

Exemplo 1.3.1 (Métrica Usual dos Reais). Considere o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. A seguinte métrica é a métrica usual dos números reais:

$$d(x, y) = |y - x|.$$

O espaço $(\mathbb{R}, d)$ é um espaço métrico.

Exemplo 1.3.2 (Métrica Discreta). Seja X um conjunto qualquer. Então, se definirmos a *métrica discreta* em X por

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

Exemplo 1.3.3 (Métrica Euclidiana de $\mathbb{R}^n$). Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Agora, defina

$$d(x, y) = \|y - x\|,$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana de $\mathbb{R}^n$. O espaço $(\mathbb{R}^n, d)$ é um espaço métrico. Além do mais, possui as seguintes propriedades:

1. Para todo $a, x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x + a, y + a) = d(x, y)$.
2. Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|d(x, y)$.

Poderíamos ter feito o mesmo para $\mathbb{C}^n$.

Exemplo 1.3.4 (Os Complexos e o $\mathbb{R}^2$). Podemos identificar um número complexo $z = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ com o elemento $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Assim, usando a métrica euclidiana de $\mathbb{R}^2$, obtemos a métrica

$$d(\alpha_1 + \beta_1 i, \alpha_2 + \beta_2 i) = \sqrt{(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2 - \beta_1)^2}.$$

Exemplo 1.3.5 (Identificando Dois Conjuntos). O que fizemos no exemplo 1.3.4, poderia ter sido feito para qualquer injeção. Se (X, d) é um espaço métrico, e $f : Y \rightarrow X$ é uma injeção partindo de um conjunto qualquer Y , então podemos definir a seguinte métrica no conjunto Y :

$$d(y_1, y_2) = d(f(y_1), f(y_2)).$$

Exemplo 1.3.6 (Restrição a um Subconjunto). Seja (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$. Então, $(A, d|_{A \times A})$ é também um espaço métrico. De fato, esta construção é exatamente o que foi feito no exemplo 1.3.5 onde a identificação entre A e X é a identidade:

$$\begin{array}{ccc} \text{id} : & A & \rightarrow X \\ & a & \mapsto a \end{array}$$

Exemplo 1.3.7. Seja X um conjunto qualquer. Denote por F o conjunto de todas as funções $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. A seguinte função NÃO é uma métrica em F :

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |g(x) - f(x)|.$$

Isso porque é possível que $d(f, g) = \infty$. No entanto, se considerarmos o conjunto $F' = \{f \in F \mid d(f, 0) < \infty\}$, onde 0 representa a função constante de valor 0 , então $(F', d|_{F'})$ é um espaço métrico. Note que poderíamos ter usado qualquer outra função no lugar de 0 .

Sempre podemos fazer isso quando uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ satisfaz, com exceção da possibilidade de assumir o valor ∞ , as condições para ser uma métrica. Esse artifício é utilizado por exemplo, em análise funcional, quando se estudam os chamados espaços L^p . É importante notar que a função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ está bem definida. Apenas não é uma métrica se assumir o valor ∞ .

Topologia Usando uma Métrica

Vamos ver como a métrica (distância) é utilizada para descrever aspectos topológicos dos espaços métricos. Veremos como uma métrica é utilizada para descrever *convergência de seqüências* (definição 2.1.1), *continuidade de funções* (definição 2.2.2 e proposição 2.3.2).

Neste capítulo, (X, d) é um espaço métrico.

2.1 Seqüências e Convergência

Seja $n \in \mathbb{N}$. A seqüência de pontos $x_n = \frac{1}{n}$ é tal que, “na medida que n se torna suficientemente grande, a seqüência x_n se aproxima de 0”. Nesta sessão, vamos formalizar o que entendemos por:

Na medida que n se torna suficientemente grande, $\frac{1}{n}$ se aproxima de 0.

Para um espaço métrico X , a noção de “se aproxima de” é um tanto quanto natural, já que temos uma métrica que nos dá uma noção de distância. A grosso modo, $x_n \in X$ se aproxima de x quando a distância entre x_n e x , $d(x_n, x)$, se aproxima de 0. Faltaria então definir o que significa dizer que a seqüência de números reais $d(x_n, x)$ “se aproxima” de 0.

Definição 2.1.1 (Convergência). *Seja $x_n \in X$ ($n \in \mathbb{N}$). Dizemos que x_n converge para um certo $x \in X$, e denotamos tal fato por $x_n \rightarrow x$, quando para todo $\varepsilon > 0$, existir $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

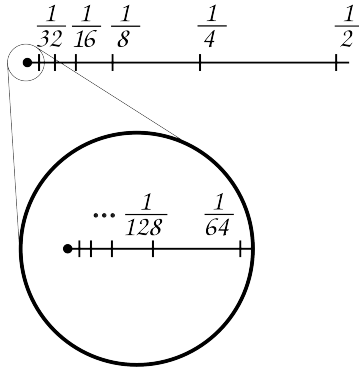


Figura 2.1: A sequência $\frac{1}{2^n}$ “se aproxima” de 0.

Também dizemos que x é o limite da sequência x_n e escrevemos $x = \lim x_n$.

Também escrevemos $x_n \xrightarrow{d} x$, quando queremos enfatizar que a convergência é dada pela métrica d .

A definição 2.1.1 generaliza o que já fazemos para os números reais. No caso dos números reais, usualmente adotamos a métrica $d(x, y) = |y - x|$.

Definição 2.1.2 (Convergência usual em $\mathbb{R}$). *Seja $\alpha_n \in \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$). Dizemos que α_n converge para $\alpha \in \mathbb{R}$, e denotamos tal fato por $\alpha_n \rightarrow \alpha$, quando para todo $\varepsilon > 0$, existir $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq N \Rightarrow |\alpha - \alpha_n| < \varepsilon.$$

Poderíamos ter tomado um outro caminho. Já de posse da definição 2.1.2, poderíamos ter definido convergência em espaços métricos de acordo com a seguinte proposição.

Proposição 2.1.3. *Seja $x_n \in X$ uma sequência. Faça $d_n = d(x_n, x)$. Então*

$$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow d_n \rightarrow 0.$$

Onde a convergência do lado direito é dada pela definição 2.1.2 ou, equivalentemente, pela métrica euclidiana em $\mathbb{R}$.

Demonstração. É evidente, pois $d(x_n, x) \rightarrow 0$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

□

Proposição 2.1.4. *Seja $x_n \in X$ uma sequência e $x \in X$. Então são equivalentes:*

1. *A sequência converge: $x_n \rightarrow x$.*
2. *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow x_n \in B_\varepsilon(x)$.*
3. *Para todo $m \in \mathbb{N}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow x_n \in B_{\frac{1}{m}}(x)$.*

Demonstração. A equivalência entre os itens (2) e (3) segue da proposição 1.2.1.

Para a equivalência entre (1) e (2), basta notar que $x_n \in B_\varepsilon(x) \Leftrightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$, e então fazer a substituição na definição 2.1.1. $\square$

Definição 2.1.5 (Métricas topologicamente equivalentes). *Enquanto não definimos o que é uma topologia, vamos dizer que duas métricas d_1 e d_2 sobre X determinam a mesma topologia (são topologicamente equivalentes) quando*

$$x_n \xrightarrow{d_1} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{d_2} x.$$

O objetivo da primeira parte deste livro é o de dar motivação para os conceitos de topologia geral que serão apresentados na segunda parte. A este propósito serve a proposição 2.1.4, que apresenta maneiras alternativas de se olhar para a convergência de sequências em espaços métricos. Na medida em que substituímos a métrica $d(x_n, x)$ pela bola $B_\varepsilon(x)$, as formulações ficam mais parecidas com suas correspondentes para espaços topológicos gerais

2.2 Continuidade

Olhando para o gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ na figura 2.2, você diria que f é contínua em a ?

De que modo podemos expressar formalmente o significado de f ser ou não contínua em a ? Note que no exemplo da figura 2.2,

$$f\left(a + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 2 \neq f(a).$$

Muitos expressam esse fato dizendo que f tem um “salto” em a .

Definição 2.2.1. *Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos. Dizemos que $f : X \rightarrow Y$ é contínua em $a \in X$ quando*

$$a_n \rightarrow a \Rightarrow f(a_n) \rightarrow f(a).$$

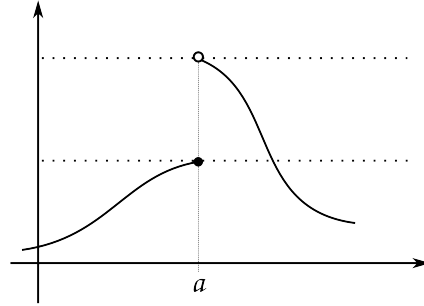


Figura 2.2: Como formular matematicamente que f é descontínua em a ?

Definição 2.2.2. *Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos. Dizemos que $f : X \rightarrow Y$ é contínua quando for contínua em todo ponto $a \in X$.*

Notação. *Também escrevemos $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ para indicar que estamos considerando os espaços métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) , e que f é uma função de X em Y .*

Observação 2.2.3. A continuidade depende apenas da “topologia” dos espaços considerados. Se $f : X \rightarrow Y$ é contínua quando considerados os espaços métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) , então será contínua nos espaços (X, d'_X) e (Y, d'_Y) sempre que as métricas d_X e d_Y forem equivalentes a d'_X e d'_Y , respectivamente.

2.3 Topologia com Bolas

Até o presente momento, temos trabalhado com sequências. Nesta seção vamos formular os mesmos conceitos utilizando bolas. Para que a transição entre sequências e bolas seja suave, vamos começar reavaliando a proposição 2.1.4.

A proposição afirma que dizer que x_n converge para x é o mesmo que dizer que toda bola centrada em x contém todos os x_n , exceto talvez para uma quantidade finita de índices n . Note que na proposição 2.1.4 falávamos em “para todo $\varepsilon > 0$ ”, mas isso é o mesmo que dizer “para toda bola”!

Resumindo o que já havia sido feito, temos a seguinte caracterização para a convergência de uma sequência.

Proposição 2.3.1. *Seja X um espaço métrico e $x_n \in X$ uma sequência de elementos de X . Então, x_n converge para $x \in X$ se, e somente se, para toda bola $B_\varepsilon(x)$ centrada em x , existir $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in B_\varepsilon(x).$$

Demonstração. Veja a proposição 2.1.4. □

Proposição 2.3.2. *Sejam X e Y espaços métricos. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *A função $f : X \rightarrow Y$ é contínua em $a \in X$.*
2. *Para toda bola $B_{f(a)} = B_\varepsilon(f(a))$ centrada em $f(a)$, existe uma bola $B_a = B_\delta(a)$ centrada em a , tal que*

$$f(B_a) \subset B_{f(a)}.$$

3. *Para toda bola $B = B_\varepsilon(f(a))$ centrada em $f(a)$, $f^{-1}(B)$ contém alguma bola centrada em a .*

Demonstração. A equivalência entre os itens (2) e (3) é evidente, já que dizer que existe uma bola é o mesmo que dizer que existe $\delta > 0$.

Vamos mostrar que o item (3) implica na continuidade de f no ponto a de acordo com a definição 2.2.1. Seja $x_n \rightarrow a$. Vamos mostrar que $f(x_n) \rightarrow f(a)$. Tome uma bola qualquer B centrada em $f(a)$. Por hipótese, $f^{-1}(B)$ contém uma bola B_a centrada em a . Pela proposição 2.3.1, temos que $x_n \in B_a \subset f^{-1}(B)$ exceto para um número finito de índices n . Ou seja, $f(x_n) \in B$, exceto para um número finito de índices. O que pela proposição 2.3.1 é o mesmo que dizer que $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

Suponha então que o item (3) não vale. Neste caso, existe uma bola B centrada em $f(a)$ tal que $f^{-1}(B)$ não contém nenhuma bola centrada em a . Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolha $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a)$ tal que $f(x_n) \notin B$. A sequência x_n converge para a (por quê?), mas $f(x_n)$ não converge para $f(a)$ (por quê?). □

Observação 2.3.3. Repare como o item 2 se assemelha à definição de continuidade que utiliza argumentos do tipo $\varepsilon - \delta$:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Topologia de Espaços Métricos: releitura

Neste capítulo, vamos fazer uma releitura do que estudamos no capítulo 2, mas desta vez, vamos tentar eliminar o máximo possível os argumentos do tipo “epsilon e delta”. O objetivo é apresentar a topologia dos espaços métricos utilizando a métrica o mínimo possível, de modo a tornar a apresentação dos conceitos mais parecida com os conceitos correspondentes quando trabalhamos com a chamada *topologia geral* (definição ??).

O conceito mais importante e mais enfatizado nos cursos de topologia é o de *conjunto aberto* (definição 3.4.1). No entanto, o conceito de *vizinhança* (definição 3.1.1) é muito mais fundamental e mais natural, principalmente quando se faz o paralelo entre o ponto de vista da *topologia geral* e a topologia dos espaços métricos. O conceito de vizinhança é muito mais próximo e generaliza muito melhor o que se faz quando se utiliza argumentos com bolas, ou argumentos do tipo “epsilon e delta”, muito comuns quando tratamos de espaços métricos.

3.1 Vizinhanças

Quando falamos de convergência e continuidade nos capítulos anteriores, estávamos de posse de uma métrica. A métrica nos dava a noção de distância que nos permitia falar de “proximidade”. Quando dizemos que x_n converge para x , não estamos de fato interessados nos pontos que estão “longe” de x . Estamos interessados apenas nos que estão “próximos”. De

fato, poderíamos nos restringir apenas a bolas “pequeninas”. Poderíamos nos restringir às bolas de raio $\frac{1}{100 \cdot n}$.

Quando x_n converge para x , é porque se V contém x e que é de certa forma *suficientemente grande*, conterá toda a sequência x_n , exceto para uma quantidade finita de índices n . Esse *suficientemente grande*, no caso de espaços métricos, significa que existe uma bola B centrada em x tal que $B \subset V$. A esses conjuntos *suficientemente grandes*, chamamos de *vizinhanças de x* .

Definição 3.1.1. *Seja X um espaço métrico e $x \in X$. Todo conjunto $V \subset X$ que contém uma bola centrada em x é chamado de vizinhança de x . Denotamos por $\mathcal{V}(x)$ o conjunto de todas as vizinhanças do ponto x .*

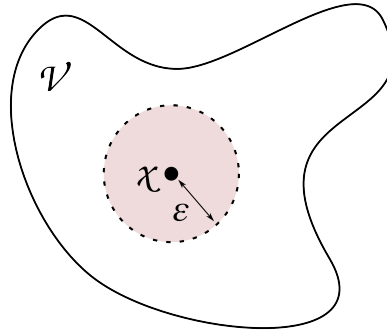


Figura 3.1: O conjunto V é uma vizinhança x pois é “grande” o suficiente para conter uma bola centrada em x .

É imediato que toda bola centrada em x é uma vizinhança de x . Mais do que isso, uma bola qualquer é vizinhança de todos os seus pontos.

Proposição 3.1.2. *Se $B \subset X$ é uma bola em um espaço métrico X . Então,*

$$y \in B \Rightarrow B \in \mathcal{V}(y).$$

Ou seja, uma bola é vizinhança de todos os seus pontos.

Demonstração. Veja a proposição 1.2.2. Ou, para um argumento mais visual, compare as figuras 1.3 e 3.1. $\square$

A seguir, apresentamos algumas propriedades elementares das vizinhanças de um ponto.

Proposição 3.1.3. *Seja X um espaço métrico, e $x \in X$. Então valem as seguintes afirmações sobre a família $\mathcal{V}(x)$ de todas as vizinhanças de x :*

1. *Se $A \in \mathcal{V}(x)$ e $A \subset B$, então $B \in \mathcal{V}(x)$.*
2. *A interseção de duas vizinhanças de x também é uma vizinhança de x . Ou seja, se $A, B \in \mathcal{V}(x)$, então $A \cap B \in \mathcal{V}(x)$.*
3. *Se $A \in \mathcal{V}(x)$ então existe $B \subset A$ tal que $x \in B$ e B é vizinhança de todos os seus pontos.*

Demonstração. O item (1) é imediato.

O item (2) é imediato do fato que as bolas centradas em x são totalmente ordenadas. Ou seja, a que tiver o menor raio estará contida em ambos os conjuntos.

O item (3) é uma re-interpretação da proposição 3.1.2. Basta tomar B como sendo uma bola centrada em x contida em A . $\square$

Das propriedades listadas na proposição 3.1.3, o item (3) é o de interpretação mais difícil. Vamos voltar a discutí-lo no capítulo ???. Uma das implicações do item (3), é a seguinte. Seja $V \in \mathcal{V}(x)$. Suponha que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenhamos uma sequência x_{nm} , indexada por m , que converge para x_n . O item (3) da proposição implica que x_n não pode convergir para x , pois todos estarão fora do conjunto B .

3.2 Continuidade em um Ponto

Usando vizinhanças para expressar continuidade a formulação fica muito simples. O trabalho todo já foi feito na proposição 2.3.2.

Notação. *Seja X um conjunto. Chamamos de partes de X , e denotamos por $\mathcal{P}(X)$ a família formada por todos os subconjuntos de X .*

Se $f : X \rightarrow Y$ e $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(Y)$, escrevemos $f^{-1}(\mathcal{F})$ para indicar a família

$$f^{-1}(\mathcal{F}) = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{F}\}.$$

Proposição 3.2.1. *Sejam X e Y espaços métricos. Então $f : X \rightarrow Y$ é contínua em $a \in X$ se, e somente se,*

$$f^{-1}(\mathcal{V}(f(a))) \subset \mathcal{V}(a).$$

Demonstração. Tome $V \in \mathcal{V}(f(a))$. Então existe uma bola B centrada em $f(a)$, tal que $B \subset V$. Pela proposição 2.3.2, $f^{-1}(B) \in \mathcal{V}(a)$. Portanto, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$.

Por outro lado, se $f^{-1}(\mathcal{V}(f(a))) \subset \mathcal{V}(a)$, teremos que em particular $f^{-1}(B) \in \mathcal{V}(a)$ para toda bola centrada em $f(a)$. Ou seja, $f^{-1}(B)$ contém uma bola centrada em a para toda bola B centrada em $f(a)$. Novamente, pela proposição 2.3.2, isso implica que f é contínua em a . $\square$

Em se tratando de espaços métricos, tanto a definição 2.2.1, quanto qualquer uma de suas formulações equivalentes dadas pelas proposições 2.3.2 e 3.2.1, poderiam ser utilizadas como a definição de continuidade em um ponto. Poderíamos ter escolhido um caminho diferente e adotado uma definição de continuidade no estilo

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Cada caracterização enfatiza um aspecto diferente do fenômeno de continuidade. É importante que não nos acomodememos a apenas uma delas, mas que escolhamos a mais adequada à situação.

3.3 Base de Vizinhanças

Quando definimos o que seriam as vizinhanças de um ponto $x \in X$ de um espaço métrico, utilizamos as bolas centradas em x . Chamando de $\mathcal{B}$ a família das bolas centradas em x , temos que

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{V}(x).$$

Além do mais, todo conjunto $V \in \mathcal{V}(x)$ contém um conjunto $B \in \mathcal{B}$. Ou seja, a sub-família $\mathcal{B}$ determina quais são as vizinhanças de x . Poderíamos ter nos restringido às bolas de raio $\frac{1}{n}$ para compor a família $\mathcal{B}$. As vizinhanças “geradas” por essa nova família $\mathcal{B}$ seriam exatamente as mesmas.

Definição 3.3.1. *Seja $\mathcal{V}(x)$ a família de todas as vizinhanças de $x \in X$, onde X é um espaço métrico. Então, dizemos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}(x)$ é uma base de vizinhanças de x quando*

$$\mathcal{V}(x) = \{V \subset X \mid \exists B \in \mathcal{B}, \text{ com } B \subset V\}$$

Proposição 3.3.2. *Seja X um espaço métrico e $x \in X$. Seja também $\mathcal{B}$ uma base de vizinhanças de x . Então, uma sequência x_n converge para x se, e somente se, para todo $B \in \mathcal{B}$ existir $N = N(B) \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in B.$$

Demonstração. É óbvio que se existe tal $N = N(B) \in \mathbb{N}$ para todo $B \in \mathcal{B}$, então para $V \in \mathcal{V}(x)$, podemos tomar $N(V) = N(B)$ para qualquer $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset V$. Será verdadeiro que

$$n \geq N(V) = N(B) \Rightarrow x_n \in B \subset V.$$

Portanto, $x_n \rightarrow x$. □

Proposição 3.3.3. *Sejam X e Y espaços métricos e $f : X \rightarrow Y$. Sejam $a \in X$ e $\mathcal{B}$ uma base de vizinhanças de $f(a)$. Então, f é contínua em a se, e somente se,*

$$f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{V}(a).$$

Demonstração. Pela proposição 3.2.1, basta mostrar que

$$f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{V}(a) \Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{V}(f(a))) \subset \mathcal{V}(a).$$

Uma direção é óbvia, já que $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}(f(a))$. Suponha então que $V \in \mathcal{V}(f(a))$. Neste caso, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset V$. Assim, $f^{-1}(V) \supset f^{-1}(B) \in \mathcal{V}(a)$. Portanto, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$. □

A aplicação mais imediata da proposição é a equivalência entre as seguintes afirmações, que são definições alternativas para a continuidade de f no ponto a :

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x, a) < \frac{1}{m} \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \frac{1}{n}.$$

3.4 Conjuntos Abertos

Um conjunto aberto simplesmente um conjunto que é vizinhança de todos os seus pontos. A proposição 1.2.2 mostra que em um espaço métrico, todas as bolas são abertas. Por isso, muitos autores usam a expressão *bola aberta* para se referirem ao que neste livro definimos como *bola*. Ainda vamos formalizar isso melhor, mas os conjuntos abertos caracterizam toda a topologia do espaço, haja visto que a família

$$\mathcal{A}_x = \{V \in \mathcal{V}(x) \mid V \text{ é aberto}\}$$

é uma base de vizinhanças de x para todo $x \in X$. (veja o item (3) da proposição 3.1.3)

Conhecendo todos os conjuntos abertos, sabemos quem são as sequências convergentes, quais funções são ou não contínuas e, conforme já mencionado, quais são as vizinhanças de um ponto.

Definição 3.4.1. *Seja X um espaço métrico. Dizemos que um conjunto $A \subset X$ é aberto quando satisfaz*

$$x \in A \Rightarrow A \in \mathcal{V}(x).$$

Definição 3.4.2. *Dado um espaço métrico X , a topologia de X , denotada por τ_X é a família de todos os abertos de X . Isto é,*

$$\tau_X = \{A \subset X \mid A \text{ é aberto}\}.$$

Proposição 3.4.3. *Seja X um espaço métrico e $x \in X$. Então a família*

$$\mathcal{A}_x = \mathcal{V}(x) \cap \tau_X$$

é uma base de vizinhanças de x .

Demonstração. Basta notar que, chamando de $\mathcal{B}$ a coleção de todas as bolas centradas em x ,

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_x \subset \mathcal{V}(x).$$

Como $\mathcal{B}$ é uma base de vizinhanças de x , qualquer família “entre” $\mathcal{B}$ e $\mathcal{V}(x)$ também é uma base de vizinhanças de x . (porquê?) $\square$

Proposição 3.4.4. *Seja X um espaço métrico. Então, τ_X tem as seguintes propriedades:*

1. $\emptyset, X \in \tau_X$.
2. Se $A, B \in \tau_X$, então $A \cap B \in \tau_X$.
3. Se $A_\lambda \in \tau_X$ para uma família de índices $\lambda \in \Lambda$, então $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau_X$.

Demonstração. Para o item (1), é fácil ver que X é vizinhança de qualquer ponto $x \in X$. Para o conjunto vazio ...note que todos os elementos do conjunto vazio satisfazem a propriedade que você quiser. Neste caso, a propriedade de terem $\emptyset$ como vizinhança. ;-)

O item (2) é consequência do item (2) da proposição 3.1.3. Ou seja, se $x \in A \cap B$, como A e B são vizinhanças de x , então $A \cap B$ também é vizinhança de x . Assim, $A \cap B$ é vizinhança de todos os seus pontos.

Do mesmo modo, o item (3) é consequência do item (1) da proposição 3.1.3. $\square$

Proposição 3.4.5. *Seja X um espaço métrico e $A \subset X$. Então, são equivalentes:*

1. *O conjunto A é aberto.*
2. *O conjunto A pode ser escrito como uma união de bolas.*

Demonstração. Se A é aberto, então para cada ponto $x \in A$ existe uma bola B_x centrada em x e contida em A . Desta forma, é evidente que

$$A = \bigcup_{x \in A} B_x.$$

Ou seja, A é uma união de bolas.

Por outro lado, sabemos que as bolas são conjunto abertos. Assim, qualquer conjunto que seja uma união de bolas é, pelo item (3) da proposição 3.4.4, um conjunto aberto. $\square$

Sequências e Convergência com Abertos

Dado um espaço métrico X . Podemos caracterizar o fenômeno de convergência em termos de sua topologia τ_X ? De fato, para dizer se $x_n \in X$ converge ou não para um certo $x \in X$, de acordo com a proposição 3.3.2, precisamos apenas conhecer uma base de vizinhanças de x qualquer. Sabemos que os abertos que contém x formam uma base de vizinhanças de x . Sendo assim, concluímos que x_n converge para x se, e somente se, para todo aberto A que contenha o ponto x existir $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in A.$$

3.5 Continuidade em Todo Ponto

Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ entre espaços métricos X e Y é contínua quando é contínua em todo ponto do seu domínio. Se considerarmos $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$, a função será contínua em $x \in X$ quando f^{-1} levar vizinhanças de $f(x)$ em vizinhanças de x . Sendo assim, se $A \subset Y$ for um conjunto aberto (vizinhança de todos os seus pontos) e f for contínua, então $f^{-1}(A)$ será também vizinhança de todos os seus pontos. Ou seja, se f é contínua, então $f^{-1}(\tau_Y) \subset \tau_X$. Vamos formalizar isso.

Proposição 3.5.1. *Seja X e Y um espaço métrico, e $f : Y \rightarrow X$ uma função qualquer. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. A função f é contínua em todo ponto de X .

2. Vale que $f^{-1}(\tau_Y) \subset \tau_X$.

Demonstração. Seja $A \in \tau_Y$. Então, para todo $x \in f^{-1}(A)$ temos que A é vizinhança de $f(x)$, e pela proposição 3.2.1, $f^{-1}(A)$ é vizinhança de x . Ou seja, $f^{-1}(A)$ é aberto.

Por outro lado, sabemos pela proposição 3.4.3 que para todo $x \in X$,

$$\mathcal{A}_{f(x)} = \mathcal{V}(f(x)) \cap \tau_Y$$

é uma base de vizinhanças de $f(x)$. Pelo item (2), temos que $f^{-1}(\mathcal{A}_{f(x)})$ é aberto e obviamente contém x . Ou seja, $f^{-1}(\mathcal{A}_{f(x)}) \in \mathcal{V}(x)$. Pela proposição 3.3.3, segue que f é contínua em x . $\square$

E o que significa então dizer que $f : X \rightarrow Y$ é bijetiva, contínua e sua inversa é contínua? O fato de ser uma bijeção implica que podemos identificar os pontos de X com os pontos de Y . O fato de ser contínua com inversa contínua significa que com essa identificação as estruturas topológicas τ_X e τ_Y também são identificadas. Esse tipo de função f é chamada de *homomorfismo*.

Definição 3.5.2. Se X e Y são espaços métricos, então uma função $f : X \rightarrow Y$ é chamada de homomorfismo quando é bijetiva, contínua com inversa também contínua.

Parte II

Topologia Geral