

Topologia Geral por Vários Ângulos

André Caldas de Souza
and YOU! :-)

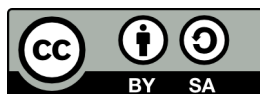
2 de dezembro de 2014

Este Livro é Livre

Este livro pode ser copiado à vontade. Se você recebeu em formato digital, fique à vontade para copiá-lo e comparilhá-lo quantas vezes quiser. Você pode também imprimí-lo e fotocopiá-lo o tanto que quiser. Claro que é sempre importante pensar na natureza e no impacto ambiental. Procure não desperdiçar recursos. ;-)

Quer imprimir e vender este livro para os seus colegas? Fique à vontade, também! Você é dono de uma editora e quer imprimir sua própria versão, vender e ficar rico com esse livro sem precisar pagar nenhum tostão em direitos autorais? Pois na minha opinião, se você o fizer estará contribuindo para um mundo melhor. Uma das poucas restrições é que você não tire dos outros essa liberdade que lhe foi concedida. Se você passar esse livro pra frente, não poderá proibir aquele que o recebeu de fazer o mesmo.

Este livro está licenciado sob os termos da licença “Creative Commons Attribution Share Alike 3.0”. Os termos estão disponíveis na internet através do endereço <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.



A versão mais atual deste livro pode ser encontrada na internet no endereço <http://topologia-geral.ourproject.org/>.

Neste endereço também podem ser encontrados os arquivos $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, que você pode alterar e usar para criar sua própria versão deste livro.

Sobre o OurProject.org

O site onde está hospedado o projeto deste livro é um repositório de conteúdos livre. Qualquer um que queira produzir conteúdos livres — como livros, poesias, músicas, vídeos e etc. — pode utilizá-lo como ferramenta. Ah... o site sobrevive com doações. ;-)

Endereço: <http://ourproject.org/>

Faz algum tempo que eu procurava um lugar que pudesse hospedar o projeto de um livro livre. Já estava pensando em tentar fazer alguma coisa nesse estilo dentro do próprio departamento de matemática da UnB. Felizmente encontrei o OurProject e isso não será mais necessário.

Como Ajudar?

A melhor maneira de ajudar, é repassando este livro para o maior número de pessoas! Quanto mais pessoas tiverem interesse no livro, maiores serão as chances de se atingir um bom nível de qualidade. Sugestões, correções ou contribuições podem ser enviadas para o e-mail topologia-geral-discussion@lists.ourproject.org. Ainda não sei quão aberto a sugestões estou disposto a ser. No entanto, você é livre para, respeitando os termos da licença, criar sua própria versão e incluir seu próprio conteúdo. Os arquivos que compõem o projeto deste livro podem ser baixados do repositório SVN no endereço

https://ourproject.org/scm/?group_id=914.

Contribuindo com Figuras

Me falta um certo dom para criar figuras de qualidade. :-)

Se você puder contribuir com imagens, estas devem estar preferencialmente no formato SVG. O SVG foi adotado por ser um *padrão aberto* baseado em XML. O aplicativo que eu uso para criar figuras é *software livre* e chama-se *Inkscape*. A página do projeto *Inkscape* é <http://www.inkscape.org/>.

Contribuindo com Código L^AT_EX

Os arquivos L^AT_EX devem seguir o mesmo tipo de formatação dos demais. Na medida do possível, o arquivo L^AT_EX não deve conter “gambiarras” ou comandos de formatação explícitos no meio do texto.

Os arquivos do projeto contém várias linhas com comentários explicando o que falta ser feito. Basta procurar pela palavra TODO (a fazer).

Por Quê?

Eu (André Caldas) NÃO acredito que “coletar taxas” seja a melhor maneira de se sobreviver da produção cultural. Na minha opinião, as pessoas devem receber para produzir; e não produzir na esperança de “coletar taxas” relativas ao direito autoral para o resto da vida. Eu, por exemplo, atualmente sou estudante de doutorado da UnB e recebo uma bolsa de estudo da CAPES. Apesar de a bolsa não cobrir os custos para a produção deste livro, foi esta mesma bolsa que viabilizou que eu pudesse deixar o meu emprego para me dedicar às minhas atividades acadêmicas. Ou seja, a sociedade já me oferece meios para que eu possa me dedicar a estas atividades, o que inclui a produção deste livro. :-)

Não vejo sentido em um professor de uma universidade pública, que já recebe um salário do governo para que produza conhecimento, ter monopólios sobre o fruto do seu trabalho. Vejo menos sentido ainda quando esse professor vende tal monopólio para ser explorado. Perceba que isso não é uma crítica ao lucro ou à exploração da produção científica. É uma crítica ao monopólio sobre os direitos de uso daquilo que foi produzido com dinheiro público. Não faz sentido que a sociedade faça esse tipo de investimento e depois não possa ter acesso ao que foi produzido. Livros é o menor dos problemas. Vemos que pesquisas para o desenvolvimento de medicamentos ou qualquer outra coisa que vá melhorar a qualidade de vida da população, como melhoria na alimentação e acesso ao lazer, são feitas com dinheiro público em parceria com instituições privadas de modo que a sociedade acaba sendo privada de seus frutos. Não acredito que seja errado fazer parceria com instituições privadas. O que não se pode é privar a sociedade dos frutos do trabalho no qual investiu. Vemos instituições de pesquisa se valerem de recursos públicos durante as pesquisas e depois correrem atrás de registros de patentes e coisas do tipo que servem apenas ao propósito de privar a sociedade dos frutos dessa mesma pesquisa.

Se o governo, por exemplo, a uns 10 anos atrás tivesse começado a financiar a produção de livros e exigisse que o fruto desse trabalho fosse verdadeiramente livre (como é este livro), hoje não faríamos licitações para a “compra” de livros; faríamos uma licitação para a impressão e a distribuição desses livros. Falta visão de longo prazo. Deveríamos investir na produção de livros livres. O autor deve sim receber por seu trabalho. Só que deve receber enquanto faz o trabalho, e não depois através do recolhimento de taxas e de mecanismos de opressão, como os que apreendem máquinas de fotocópia nas universidades.

Tenho vários amigos que fazem cópias de muitos livros. Sempre lembro a eles que quando virarem autores não devem “virar a casaca” e começar a perseguir os que fazem cópias. Gostaria de fazer o mesmo pedido ao leitor! :-)

Brasília, 23 de abril de 2010,
André Caldas

Sumário

Este Livro é Livre	i
Sumário	iii
Prefácio	v
I Espaços Métricos	1
1 Definição e Propriedades	2
1.1 Definição	2
1.2 Propriedades Elementares	4
1.3 Exemplos	6
2 Topologia Usando uma Métrica	10
2.1 Seqüências e Convergência	10
2.2 Continuidade	12
2.3 Topologia com Bolas	13
3 Topologia de Espaços Métricos: releitura	16
3.1 Vizinhanças	16
3.2 Continuidade em um Ponto	18
3.3 Base de Vizinhanças	19
3.4 Conjuntos Abertos	20
3.5 Continuidade em Todo Ponto	21
II Topologia Geral	23
4 Motivação e Definições	24
4.1 Motivação	24
4.2 Definição	25
4.3 Vizinhanças e Base de Vizinhanças de um Ponto	26
4.4 Continuidade em um Ponto	28
4.5 Continuidade	28
5 Construindo Topologias	31
5.1 Comparando Topologias	31
5.2 Sub-Base	33
5.3 Bases	36
5.4 Cardinalidade das Bases e Sub-Bases	38
6 Fecho e Interior	41
6.1 Fecho e Fechado	41
6.2 Interior	44

6.3	Continuidade	45
6.4	Convergência	46
7	Topologias Derivadas de Outras Topologias	48
7.1	Topologia de um Sub-Espaço	48
7.2	Topologias Inicial e Final	51
7.3	Topologia Produto	55
7.4	Topologia Quociente	60
7.5	Topologias das Sequências Convergentes	64
8	Conexidade	66
8.1	Definição e Exemplos	66
8.2	Conexidade e Continuidade	68
8.3	Propriedades	69
8.4	Conexidade por Caminhos	71
8.5	Conexidade Local	73
9	Compacidade	75
9.1	Definição e Exemplos	75
9.2	Propriedades Elementares	76
9.3	Compacidade nos Reais	78
9.4	Compacidade em \mathbb{R}^n	79
9.5	Compacidade em Espaços Métricos	80
9.6	Espaços de Hausdorff	83
9.7	Compacidade com Sub-Bases	86
9.8	Produto de Compactos	87
	Dicas e Respostas dos Exercícios	89

Prefácio

Os livros que tratam do assunto *topologia* parecem se dividir em duas categorias:

- Começam com definições abstratas e pouco motivadas.
- Tratam *apenas* de espaços métricos.

Os espaços métricos são sem dúvida a melhor motivação para o estudo da *topologia geral*. No entanto, existem muitos conceitos, como os de *sequência de Cauchy*, *completude*, *limitação* e *continuidade uniforme*, que não são conceitos topológicos. O que acontece é que os textos que tratam de topologia dos espaços métricos dão muita ênfase a esses conceitos, à *equivalência de métricas*, ao *completamento de espaços*, e por aí vai. O fato é que dessa forma não se tem um curso de *topologia*, tem-se um curso de *espaços métricos*.

Por outro lado, sem falar de espaços métricos é muito difícil dar alguma motivação para o que venha a ser uma *topologia*. Assim, neste livro, fizemos uma introdução rápida aos espaços métricos sem nenhuma menção a questões que não sejam puramente topológicas. Falamos de bolas, de convergência e de continuidade. A idéia é a de se fazer uma transição entre as formulações que enfatizam mais a métrica até chegar a formulações que dependam apenas da topologia do espaço.

Um outro diferencial deste livro está na busca por maneiras alternativas de se olhar para os fenômenos topológicos. Em geral os conjuntos abertos recebem atenção demasiada. Por exemplo, quando estudamos análise funcional, estamos bastante interessados na continuidade de operadores lineares em topologias que são invariantes por translações. Neste caso a continuidade se resume à continuidade na origem. Quando consideramos a continuidade em um único ponto do espaço, a preocupação em demonstrar que determinados conjuntos são *abertos* é um exagero desnecessário. Deveríamos nos preocupar se estes conjuntos são ou não *vizinhanças* de 0. A intenção é que o leitor consiga identificar maneiras alternativas que melhor se adaptem ao fenômeno que está sendo analisado. Para um determinado caso, talvez o melhor seja considerar *abertos*, talvez *vizinhanças*, *redes*, *sequências*, *fechados*, *filtros* e etc.

Parte I

Espaços Métricos

Definição e Propriedades

Vamos descrever (definir) o que se entende por *espaço métrico* (Definição 1.1), e estudar propriedades desses espaços que nos motivarão a definir o conceito mais geral de espaço topológico (Definição 4.1).

Os conhecimentos adquiridos neste capítulo serão importantes para que o leitor possa ter exemplos concretos e também motivação suficiente para reconhecer a utilidade e aceitar com naturalidade os conceitos que serão apresentados nos capítulos seguintes.

1.1 Definição

Um espaço métrico é um conjunto X , munido de uma métrica $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$. A métrica faz com que esteja definida uma noção de *distância* entre os pontos de X .

Definição 1.1 (Métrica). *Seja X um conjunto qualquer. Uma métrica definida sobre X é uma função*

$$\begin{aligned} d : X \times X &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) \end{aligned}$$

que, para todo $x, y, z \in X$, satisfaz

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (*desigualdade triangular*)

Dizemos que (X, d) é um espaço métrico. Em geral, por um abuso de linguagem, quando a métrica d está subentendida, dizemos que X é um espaço métrico.

Em \mathbb{R}^n , a métrica usualmente adotada é a métrica euclidiana, dada por

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2}. \quad (1.1)$$

Onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Em várias situações, o item (1) da definição de métrica nos permitirá concluir que dois pontos $x, y \in X$ são de fato o mesmo ponto. Basta mostrar que $d(x, y) = 0$. O item (3) é o mais importante da definição. É este item que abstrai a idéia de que a distância entre dois pontos está intimamente relacionada com o “menor caminho” entre dois pontos:

Se existe um caminho A , partindo de x e indo para y , e um caminho B , partindo de y e indo para z , então, a menor distância (ou o ínfimo dos comprimentos dos caminhos partindo de x e indo para z) não é maior do que a soma dos comprimentos de A e B . (Figura 1.1)

Definição 1.2 (Bola). *Seja (X, d) um espaço métrico, $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. A bola de centro x e raio ε é o conjunto de todos os pontos que distam de x menos que ε :*

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}.$$

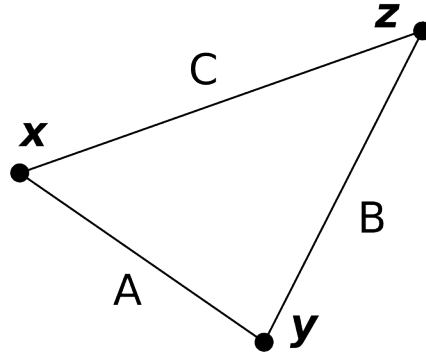


Figura 1.1: Desigualdade triangular: $C \leq A + B$.

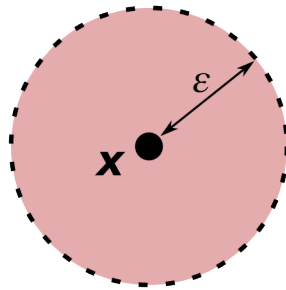


Figura 1.2: A bola de centro x e raio ε .

Exercícios

1.1.1. Seja X um espaço métrico. Mostre que, $y \in B_\varepsilon(x)$ se, e somente se, $x \in B_\varepsilon(y)$.

1.1.2. Em um espaço métrico X , mostre que para $x \in X$ e $\varepsilon \geq \delta > 0$,

$$B_\delta(x) \subset B_\varepsilon(x).$$

1.1.3. Em um espaço métrico X , dado um ponto $x \in X$ e $\varepsilon > \delta > 0$ distintos, podemos concluir que

$$B_\delta(x) \subsetneq B_\varepsilon(x)?$$

1.1.4. Na definição de espaço métrico, podemos substituir o item (3)

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

por

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)?$$

1.1.5. Na definição de espaço métrico, podemos substituir o item (2)

$$d(x, y) = d(y, x)$$

por

$$d(x, z) \leq d(y, x) + d(z, y)?$$

1.1.6. Mostre que $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma métrica se, e somente se,

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

$$2. d(z, x) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

1.1.7. Encontre um exemplo de uma aplicação $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfazendo

$$1. d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y; \text{ e}$$

$$2. d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z);$$

mas que não é uma métrica.

1.1.8. Leia a página da Wikipedia em inglês sobre espaços métricos. Depois, vá até a Wikipedia em português e melhore a página sobre espaços métricos que tem lá. :-)

1.2 Propriedades Elementares

Nesta seção, (X, d) é um espaço métrico. As propriedades mais interessantes dos espaços métricos são consequência da desigualdade triangular. Muitas vezes, essas propriedades são mais fáceis de serem visualizadas quando temos em mente a distância euclidiana em \mathbb{R}^2 . Ou seja, quando fazemos um desenho em uma folha de papel. É importante enfatizar no entanto, que os resultados dependem apenas das propriedades das métricas (Definição 1.1). O desenho melhora a intuição, mas não é uma demonstração.

Todas as proposições deste capítulo são muito simples. O leitor deve ser capaz de completar as demonstrações que afirmam, por exemplo, que basta tomar um certo $\delta > 0$ para concluir a demonstração.

Proposição 1.3. *Sejam $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$B_{\frac{1}{n}}(x) \subset B_{\varepsilon}(x).$$

Demonstração. Basta tomar n grande o suficiente para que $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$. □

A seguinte Proposição, apesar de muito simples, é fundamental para o desenvolvimento de toda a teoria que se seguirá, e é consequência direta da desigualdade triangular.

Proposição 1.4. *Sejam $x \in X$, $\varepsilon > 0$ e*

$$y \in B_{\varepsilon}(x).$$

Então, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_{\delta}(y) \subset B_{\varepsilon}(x).$$

Veja a Figura 1.3.

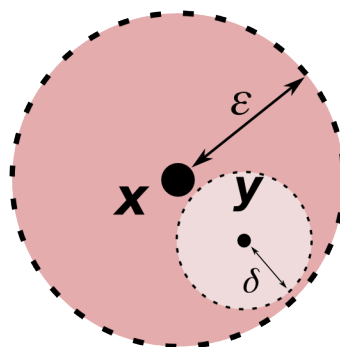


Figura 1.3: Para cada ponto y da bola $B_{\varepsilon}(x)$, temos uma “bolinha” centrada em y e toda contida em $B_{\varepsilon}(x)$.

Demonstração. Basta tomar $\delta < \varepsilon - d(x, y)$. Neste caso,

$$\begin{aligned} z \in B_\delta(y) &\Rightarrow d(y, z) < \delta \\ &\Rightarrow d(x, z) < d(x, y) + \delta < \varepsilon \\ &\Rightarrow z \in B_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

□

Proposição 1.5. *Sejam $x_1, x_2 \in X$, e $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Então, dado $z \in B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap B_{\varepsilon_2}(x_2)$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$B_\delta(z) \subset B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap B_{\varepsilon_2}(x_2).$$

Veja a Figura 1.4.

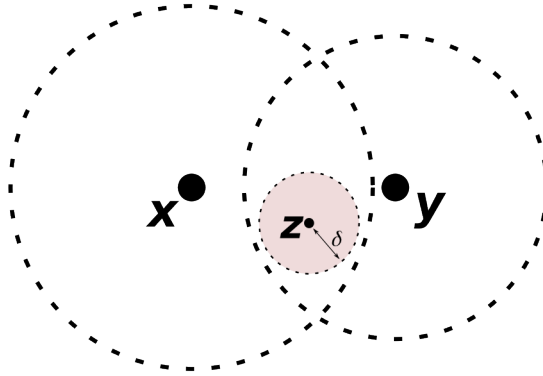


Figura 1.4: Para cada ponto z da interseção $B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap B_{\varepsilon_2}(x_2)$, temos uma “bolinha” centrada em z e toda contida na interseção.

Demonstração. Pela Proposição 1.4, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} B_{\delta_1}(z) &\subset B_{\varepsilon_1}(x_1) \\ B_{\delta_2}(z) &\subset B_{\varepsilon_2}(x_2). \end{aligned}$$

Basta portanto tomar qualquer $\delta \leq \min(\delta_1, \delta_2)$. □

Repare que a proposição “vale” para qualquer número finito de bolas $B_{\varepsilon_1}(x_1), \dots, B_{\varepsilon_n}(x_n)$. Mas não “vale” para um número infinito de bolas.

Proposição 1.6. *Sejam $x, y \in X$ dois pontos distintos de X . Então existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset.$$

Veja a Figura 1.5.

Demonstração. Como $x \neq y$, temos que $d(x, y) > 0$. Basta tomar

$$\varepsilon \leq \frac{d(x, y)}{2}.$$

□

Proposição 1.7. *Seja $x \in X$. Então,*

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} B_\varepsilon(x) = \{x\}.$$

Demonstração. Basta mostrar que dado $y \in X$ com $y \neq x$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$y \notin B_\varepsilon(x).$$

Basta tomar $\varepsilon \leq d(x, y)$. Ou então notar que isso segue como um caso particular da Proposição 1.6. □

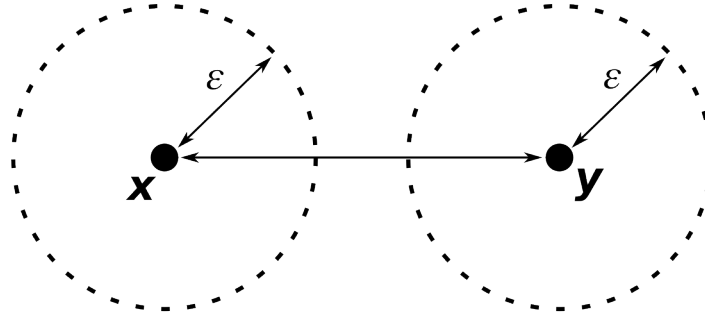


Figura 1.5: Dois pontos distintos x e y podem ser “separados” por bolas disjuntas.

Exercícios

1.2.1. Mostre que em um espaço métrico X , dado $x \in X$, temos que

$$\bigcup_{0 < \delta < \varepsilon} B_\delta(x) = B_\varepsilon(x).$$

1.2.2. Seja X um espaço métrico e x um elemento de X . Mostre que para toda sequência ilimitada $n_k \in \mathbb{N}$,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n_k}}(x) = \{x\}.$$

1.2.3. Seja X um espaço métrico, $x_1, \dots, x_n \in X$ e $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ números reais maiores que zero. Mostre que se

$$x \in \bigcap_{j=1}^n B_{\varepsilon_j}(x_j),$$

então existe $\delta > 0$ tal que

$$B_\delta(x) \subset \bigcap_{j=1}^n B_{\varepsilon_j}(x_j).$$

1.2.4. Por que a demonstração do exercício 1.2.3 não vale se o número de bolas não for finito?

1.2.5. Na demonstração da Proposição 1.7, exatamente quais propriedades da métrica foram utilizadas?

1.2.6. Na demonstração da Proposição 1.6, onde foram utilizadas as seguintes propriedades da métrica?

1. $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.
2. $x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

1.3 Exemplos

Exemplo 1.8 (Métrica Usual dos Reais (métrica euclidiana)). Considere o conjunto dos números reais \mathbb{R} . A seguinte métrica é a métrica usual dos números reais:

$$d_{|\cdot|}(x, y) = |y - x|.$$

O espaço $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ é um espaço métrico.

Exemplo 1.9 (Métrica Discreta). Seja X um conjunto qualquer. Então, definimos a *métrica discreta* em X por

$$d_d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}.$$

Exemplo 1.10 (Métrica Euclidiana de \mathbb{R}^n). Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^n . Agora, defina

$$d(x, y) = \|y - x\|,$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana de \mathbb{R}^n . O espaço (\mathbb{R}^n, d) é um espaço métrico. Além do mais, possui as seguintes propriedades:

1. Para todo $a, x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x + a, y + a) = d(x, y)$.
2. Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|d(x, y)$.

Poderíamos ter feito o mesmo para dois (ou mais) espaços métricos quaisquer, (A, d_A) e (B, d_B) , e definido a seguinte métrica em $A \times B$:

$$d((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = \sqrt{d_A(a_1, a_2)^2 + d_B(b_1, b_2)^2}.$$

Exemplo 1.11 (Métrica do Máximo em \mathbb{R}^n). Novamente, considere o espaço vetorial \mathbb{R}^n . Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ elementos de \mathbb{R}^n . Então, defina

$$d(x, y) = \max_{1 \leq j \leq n} |y_j - x_j|,$$

O espaço (\mathbb{R}^n, d) é um espaço métrico. Nesta métrica, as bolas são na verdade “quadrados”. :-)

Poderíamos ter feito o mesmo para dois (ou mais) espaços métricos quaisquer, (A, d_A) e (B, d_B) , e definido a seguinte métrica em $A \times B$:

$$d((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = \max\{d_A(a_1, a_2), d_B(b_1, b_2)\}.$$

Exemplo 1.12 (Métrica da Soma em \mathbb{R}^n). Novamente, considere o espaço vetorial \mathbb{R}^n . Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ elementos de \mathbb{R}^n . Então, defina

$$d(x, y) = \sum_{1 \leq j \leq n} |y_j - x_j|,$$

O espaço (\mathbb{R}^n, d) é um espaço métrico.

Novamente, poderíamos ter feito o mesmo para dois (ou mais) espaços métricos, (A, d_A) e (B, d_B) , e definido a seguinte métrica em $A \times B$:

$$d((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = d_A(a_1, a_2) + d_B(b_1, b_2).$$

Exemplo 1.13 (Os Complexos e o \mathbb{R}^2). Podemos identificar um número complexo $z = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ com o elemento $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Assim, usando a métrica euclidiana de \mathbb{R}^2 , obtemos a métrica

$$d(\alpha_1 + \beta_1 i, \alpha_2 + \beta_2 i) = \sqrt{(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2 - \beta_1)^2}.$$

Exemplo 1.14 (Identificando Dois Conjuntos). O que fizemos no Exemplo 1.13, poderia ter sido feito para qualquer aplicação injetiva. Se (X, d_X) é um espaço métrico, e $f : Y \rightarrow X$ é uma injeção partindo de um conjunto qualquer Y , então podemos definir a seguinte métrica no conjunto Y :

$$d_Y(y_1, y_2) = d_X(f(y_1), f(y_2)).$$

Exemplo 1.15 (Restrição a um Subconjunto). Seja (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$. Então, $(A, d|_{A \times A})$ é também um espaço métrico. De fato, esta construção é exatamente o que foi feito no Exemplo 1.14 onde a identificação entre A e X é a identidade:

$$\begin{aligned} \text{id} : A &\rightarrow X \\ a &\mapsto a \end{aligned}$$

Exemplo 1.16. Seja X um conjunto qualquer. Denote por F o conjunto de todas as funções $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. A seguinte função NÃO é uma métrica em F :

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |g(x) - f(x)|.$$

Isso porque é possível que $d(f, g) = \infty$. No entanto, se considerarmos o conjunto $F' = \{f \in F \mid d(f, 0) < \infty\}$, onde 0 representa a função constante de valor 0 , então $(F', d|_{F'})$ é um espaço métrico. Note que poderíamos ter usado qualquer outra função no lugar de 0 .

Sempre podemos fazer isso quando uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ satisfaz, com exceção da possibilidade de assumir o valor ∞ , as condições para ser uma métrica listadas na Definição 1.1. Esse artifício é utilizado por exemplo, em análise funcional, quando se estudam os chamados espaços L^p . É importante notar que a função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ está bem definida. Apenas não é uma métrica se assumir o valor ∞ .

Exercícios

1.3.1. Sejam (A, d_A) e (B, d_B) espaços métricos. Mostre que

$$\begin{aligned} d : (A \times B) \times (A \times B) &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ ((a_1, b_1), (a_2, b_2)) &\mapsto \max\{d_A(a_1, a_2), d_B(b_1, b_2)\} \end{aligned}$$

é uma métrica.

1.3.2. Seja $(X_\lambda, d_{X_\lambda})$ ($\lambda \in \Lambda$) uma família de espaços métricos tais que a imagem de d_{X_λ} esteja contida em $[0, 1]$. Seja $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. Mostre que

$$\begin{aligned} d : X \times X &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ ((x_\lambda), (y_\lambda)) &\mapsto \sup_{\lambda \in \Lambda} d_{X_\lambda}(x_\lambda, y_\lambda) \end{aligned}$$

é uma métrica.

1.3.3. Seja $(X_\lambda, d_{X_\lambda})$ ($\lambda \in \Lambda$) uma família de espaços métricos. Faça $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, e defina

$$\begin{aligned} d : X \times X &\rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \\ ((x_\lambda), (y_\lambda)) &\mapsto \sup_{\lambda \in \Lambda} d_{X_\lambda}(x_\lambda, y_\lambda) \end{aligned}.$$

Fixando $a \in X$, e definindo

$$\tilde{X} = \{x \in X \mid d(a, x) < \infty\},$$

mostre que, (\tilde{X}, d) é um espaço métrico.

1.3.4. Seja $(X_\lambda, d_{X_\lambda})$ ($\lambda \in \Lambda$) uma família de espaços métricos. Faça $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, e defina

$$\begin{aligned} d : X \times X &\rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \\ ((x_\lambda), (y_\lambda)) &\mapsto \sum_{\lambda \in \Lambda} d_{X_\lambda}(x_\lambda, y_\lambda) \end{aligned}.$$

Fixando $a \in X$, e definindo

$$\tilde{X} = \{x \in X \mid d(a, x) < \infty\},$$

mostre que, (\tilde{X}, d) é um espaço métrico.

1.3.5. Sejam (X_n, d_{X_n}) , $n \in \mathbb{N}$ espaços métricos onde a imagem de d_{X_n} esteja contida em $[0, 1]$. Seja $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Mostre que

$$\begin{aligned} d : X \times X &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ ((x_n), (y_n)) &\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_{X_n}(x_n, y_n) \end{aligned}$$

é uma métrica.

1.3.6. De um exemplo de uma aplicação

$$d : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$$

que satisfaz $x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$, e que também satisfaz os itens (2) e (3) da Definição 1.1, mas que não é uma métrica.

1.3.7. Considere a aplicação

$$d : [0, 1) \times [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & , x = 0, y \neq 0 \\ |x - y| & , \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mostre que d satisfaz os itens (1) e (3) da Definição 1.1, mas não é uma métrica.

Topologia Usando uma Métrica

Vamos ver como a métrica (distância) é utilizada para descrever aspectos topológicos dos espaços métricos. Veremos como uma métrica é utilizada para descrever *convergência de seqüências* (Definição 2.1) e *continuidade de funções* (Definição 2.7 e Proposição 2.10).

Neste capítulo, (X, d) é um espaço métrico.

2.1 Seqüências e Convergência

Seja $n \in \mathbb{N}$. A seqüência de pontos $x_n = \frac{1}{n}$ é tal que, “na medida que n se torna suficientemente grande, a seqüência x_n se aproxima de 0”. Nesta sessão, vamos formalizar o que entendemos por:

Na medida que n se torna suficientemente grande, $\frac{1}{n}$ se aproxima de 0.

Para um espaço métrico X , a noção de “se aproxima de” é um tanto quanto natural, já que temos uma métrica que nos dá uma noção de distância. A grosso modo, $x_n \in X$ se aproxima de x quando a distância entre x_n e x , $d(x_n, x)$, se aproxima de 0. Faltaria então definir o que significa dizer que a seqüência de números reais $d(x_n, x)$ “se aproxima” de 0.

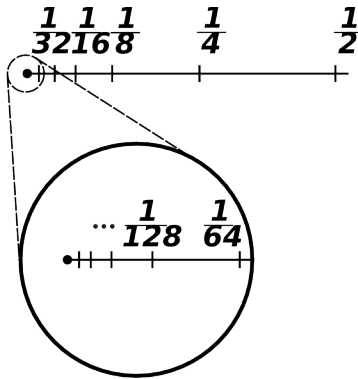


Figura 2.1: A seqüência $\frac{1}{2^n}$ “se aproxima” de 0.

Definição 2.1 (Convergência). *Sejam (X, d) um espaço métrico e $x_n \in X$ ($n \in \mathbb{N}$) uma seqüência de pontos de X . Dizemos que x_n converge para um certo $x \in X$, quando para todo $\varepsilon > 0$, existir $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Denotamos tal fato por

$$x_n \rightarrow x,$$

ou por $x_n \xrightarrow{d} x$ se quisermos enfatizar que a convergência é na métrica d .

Também dizemos que x é o limite da seqüência x_n e escrevemos $x = \lim x_n$.

A Definição 2.1 generaliza o que já fazemos para os números reais. No caso dos números reais, usualmente adotamos a métrica $d(x, y) = |y - x|$.

Definição 2.2 (Convergência usual em \mathbb{R}). *Seja $\alpha_n \in \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$). Dizemos que α_n converge para $\alpha \in \mathbb{R}$, e denotamos tal fato por $\alpha_n \rightarrow \alpha$, quando para todo $\varepsilon > 0$, existir $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq N \Rightarrow |\alpha - \alpha_n| < \varepsilon.$$

Poderíamos ter tomado um outro caminho. Já de posse da definição 2.2, poderíamos ter definido convergência em espaços métricos de acordo com a seguinte proposição.

Proposição 2.3. *Seja $x_n \in X$ uma sequencia. Faça $d_n = d(x_n, x)$. Então*

$$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow d_n \rightarrow 0.$$

Onde a convergência do lado direito é dada pela Definição 2.2 ou, equivalentemente, pela métrica euclidiana em \mathbb{R} .

Demonstração. É evidente, pois $d(x_n, x) \rightarrow 0$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

□

Proposição 2.4. *Seja $x_n \in X$ uma sequencia e $x \in X$. Então são equivalentes:*

1. *A sequencia converge para x : $x_n \rightarrow x$.*
2. *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow x_n \in B_\varepsilon(x)$.*
3. *Para todo $m \in \mathbb{N}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow x_n \in B_{\frac{1}{m}}(x)$.*

Demonstração. A equivalência entre os itens (2) e (3) segue da Proposição 1.3.

Para a equivalência entre (1) e (2), basta notar que $x_n \in B_\varepsilon(x) \Leftrightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$, e então fazer a substituição na Definição 2.1. □

Definição 2.5 (Métricas topologicamente equivalentes). *Enquanto não definimos o que é uma topologia, vamos dizer que duas métricas d_1 e d_2 sobre X determinam a mesma topologia (são topologicamente equivalentes) quando*

$$x_n \xrightarrow{d_1} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{d_2} x.$$

O objetivo da primeira parte deste livro é o de dar motivação para os conceitos de topologia geral que serão apresentados na segunda parte. A este propósito serve a Proposição 2.4, que apresenta maneira alternativas de se olhar para a convergência de sequencias em espaços métricos. Na medida em que substituímos a métrica $d(x_n, x)$ pela bola $B_\varepsilon(x)$, as formulações ficam mais parecidas com suas correspondentes para espaços topológicos gerais

Exercícios

2.1.1. Dê exemplos de seqüências em um espaço métrico que não convergem para nenhum ponto.

2.1.2. Não é imediato da definição de convergência que o limite de uma sequencia, quando existir, será único. Ou seja, a princípio, não há garantias de que $x_n \rightarrow x$ e $x_n \rightarrow y$ implique que $x = y$. Demonstre a unicidade do limite de sequências em espaços métricos.

2.1.3. O que significa $x_n \rightarrow x$ na métrica discreta?

2.1.4. Considere a aplicação

$$d : \begin{array}{ccc} [0, 1]^{\mathbb{N}} & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ ((x_j), (y_j)) & \mapsto & \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} |x_j - y_j| \end{array}.$$

Mostre que nesta métrica, para $x^n = (x_j^n) \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$, $x_n \rightarrow x = (x_j) \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ se, e somente se, para todo $j \in \mathbb{N}$, $x_j^n \rightarrow x_j$.

2.1.5. Considere a aplicação

$$d : \begin{array}{l} [0, 1]^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \\ ((x_j), (y_j)) \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j| \end{array} .$$

E seja

$$X = \{x \in [0, 1]^{\mathbb{N}} \mid d(x, 0) < \infty\}.$$

Exiba

1. Uma sequência $x^n = (x_j^n) \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ tal que $x_j^n \rightarrow x_j \in \mathbb{R}$, mas $(x_j) \notin X$.
2. Uma sequência $x^n = (x_j^n) \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ tal que $x_j^n \rightarrow x_j \in \mathbb{R}$, com $x = (x_j) \in X$, mas que $x^n \not\rightarrow x$.

E reflita sobre a inexistência desta patologia no caso do exercício 2.1.4.

2.1.6. Considere a aplicação

$$d : \begin{array}{l} [0, 1]^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ ((x_j), (y_j)) \mapsto \sup_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j| \end{array} .$$

Mostre que nesta métrica, para $x^n = (x_j^n) \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$, $x^n \rightarrow x = (x_j) \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, independentemente da coordenada $j \in \mathbb{N}$, $n > N \Rightarrow d(x_j^n, x_j) < \varepsilon$.

2.1.7. Considere a aplicação

$$d : \begin{array}{l} [0, 1]^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ ((x_j), (y_j)) \mapsto \sup_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j| \end{array} .$$

Exiba um exemplo de uma sequência $x^n = (x_j^n) \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$, tal que $x_j^n \rightarrow x_j$, mas $x^n \not\rightarrow x = (x_j)$.

2.2 Continuidade

Olhando para o gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ na Figura 2.2, você diria que f é contínua em a ?

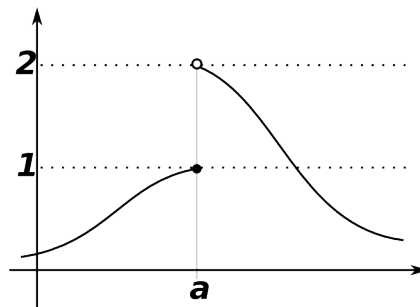


Figura 2.2: Como formular matematicamente que f é descontínua em a ?

De que modo podemos expressar formalmente o significado de f ser ou não contínua em a ? Note que no exemplo da Figura 2.2,

$$f\left(a + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 2 \neq f(a).$$

Muitos expressam esse fato dizendo que f tem um “salto” em a .

Definição 2.6. *Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos. Dizemos que $f : X \rightarrow Y$ é contínua em $a \in X$ quando*

$$a_n \rightarrow a \Rightarrow f(a_n) \rightarrow f(a).$$

Definição 2.7. Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos. Dizemos que $f : X \rightarrow Y$ é contínua quando for contínua em todo ponto $a \in X$.

Notação. Também escrevemos $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ para indicar que estamos considerando os espaços métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) , e que f é uma função de X em Y .

Observação 2.8. A continuidade depende apenas da “topologia” dos espaços considerados. Se $f : X \rightarrow Y$ é contínua quando considerados os espaços métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) , então será contínua nos espaços (X, d'_X) e (Y, d'_Y) sempre que as métricas d_X e d_Y forem equivalentes a d'_X e d'_Y , respectivamente.

Exercícios

2.2.1. Mostre que qualquer aplicação constante $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ é contínua.

2.2.2. Seja $X = [0, 1]^{\mathbb{N}}$, e considere as métricas $d_1((x_j), (y_j)) = \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j - y_j|$ e $d_2((x_j), (y_j)) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^j} |x_j - y_j|$. Mostre que

$$f : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2) \\ x \mapsto x$$

é contínua, mas sua inversa

$$f^{-1} : (X, d_2) \rightarrow (X, d_1) \\ x \mapsto x$$

não é.

2.2.3. Mostre que a função f^{-1} do exercício 2.2.2 é descontínua em todo ponto de seu domínio.

2.2.4. Mostre que

$$f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & , x < \sqrt{2} \\ 1 & , x \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

é contínua quando \mathbb{Q} e \mathbb{R} são dotados de suas métricas usuais.

2.2.5. Mostre que quando \mathbb{R} é dotado de sua métrica usual,

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & , x \in \mathbb{Q} \\ 1 & , x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

não é contínua em nenhum ponto racional, mas que $f|_{\mathbb{Q}}$ é contínua.

2.3 Topologia com Bolas

Até o presente momento, temos trabalhado com seqüências. Nesta seção vamos formular os mesmos conceitos utilizando bolas. Para que a transição entre seqüências e bolas seja suave, vamos começar reavaliando a Proposição 2.4.

A proposição afirma que dizer que x_n converge para x é o mesmo que dizer que toda bola centrada em x contém todos os x_n , exceto talvez para uma quantidade finita de índices n . Note que na Proposição 2.4 falávamos em “para todo $\varepsilon > 0$ ”, mas isso é o mesmo que dizer “para toda bola”!

Resumindo o que já havia sido feito, temos a seguinte caracterização para a convergência de uma seqüência.

Proposição 2.9. *Seja X um espaço métrico e $x_n \in X$ uma seqüência de elementos de X . Então, x_n converge para $x \in X$ se, e somente se, para toda bola $B_\varepsilon(x)$ centrada em x , existir $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in B_\varepsilon(x).$$

Demonstração. Veja a Proposição 2.4. □

Proposição 2.10. *Sejam X e Y espaços métricos. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. A função $f : X \rightarrow Y$ é contínua em $a \in X$.

2. Para toda bola $B_{f(a)} = B_\varepsilon(f(a))$ centrada em $f(a)$, existe uma bola $B_a = B_\delta(a)$ centrada em a , tal que

$$f(B_a) \subset B_{f(a)}.$$

3. Para toda bola $B = B_\varepsilon(f(a))$ centrada em $f(a)$, $f^{-1}(B)$ contém alguma bola centrada em a .

Demonstração. ■ (2) \Leftrightarrow (3)

A equivalência entre os itens (2) e (3) é evidente, já que dizer que existe uma bola é o mesmo que dizer que existe $\delta > 0$.

■ (2) \Rightarrow (1)

Vamos mostrar que o item (2) implica na continuidade de f no ponto a de acordo com a Definição 2.6. Seja $x_n \rightarrow a$. Vamos mostrar que $f(x_n) \rightarrow f(a)$. Tome uma bola qualquer B centrada em $f(a)$. Por hipótese, existe uma bola B_a centrada em a tal que

$$f(B_a) \subset B.$$

Pela Proposição 2.9, temos que $x_n \in B_a$ exceto para um número finito de índices n . Ou seja, $f(x_n) \in f(B_a) \subset B$, exceto para um número finito de índices. O que pela Proposição 2.9 é o mesmo que dizer que $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

■ (1) \Rightarrow (3)

Suponha então que o item (3) não vale. Neste caso, existe uma bola B centrada em $f(a)$ tal que $f^{-1}(B)$ não contém nenhuma bola centrada em a . Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolha $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a)$ tal que $f(x_n) \notin B$. A sequência x_n converge para a (por quê?), mas $f(x_n)$ não converge para $f(a)$ (por quê?). □

Observação 2.11. Repare como o item (2) se assemelha à definição de continuidade que utiliza argumentos do tipo $\varepsilon - \delta$:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Observação 2.12. Para mostrar que a negação do item (3) implica na não continuidade de f , construímos uma sequência $x_n \rightarrow a$ tal que $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$. Para isso, utilizamos as bolas $B_{\frac{1}{n}}(a)$ e a Proposição 1.3.

Exercícios

2.3.1. Em um espaço métrico X , dado $x \in X$, dizemos que $V \subset X$ é uma vizinhança de x quando existir uma bola $B_\varepsilon(x)$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset V$. Vamos denotar por $\mathcal{V}(x)$ a família de todas as vizinhanças de x . Mostre que uma aplicação $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ é contínua em $x \in X$ se, e somente se,

$$f^{-1}(\mathcal{V}(f(x))) \subset \mathcal{V}(x).$$

Onde

$$f^{-1}(\mathcal{V}(f(x))) = \{f^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{V}(f(x))\}.$$

2.3.2. Usando a mesma nomenclatura que no exercício 2.3.1, vamos chamar um conjunto $A \subset X$ de *aberto* quando para todo $x \in A$ valer que $A \in \mathcal{V}(x)$. Ou seja, um aberto é um conjunto que é vizinhança de todos os seus pontos. Mostre que uma aplicação $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ é contínua se, e somente se, para todo aberto $U \subset Y$, $f^{-1}(U)$ for um aberto de X .

2.3.3. Usando a nomenclatura do exercício 2.3.1, mostre que uma sequência $x_n \rightarrow x$ se, e somente se para toda vizinhança V de x , o conjunto

$$N_V = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \notin V\}$$

é finito.

2.3.4. Usando a nomenclatura do exercício 2.3.2, mostre que uma sequência $x_n \rightarrow x$ se, e somente se para todo aberto A contendo x , o conjunto

$$N_A = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \notin A\}$$

é finito.

Topologia de Espaços Métricos: releitura

Neste capítulo, vamos fazer uma releitura do que estudamos no Capítulo 2. Desta vez, vamos tentar eliminar o máximo possível os argumentos do tipo “epsilon e delta”. O objetivo é apresentar a topologia dos espaços métricos utilizando a métrica o mínimo possível, de modo a tornar a apresentação dos conceitos mais parecida com seus correspondentes quando trabalhamos com a chamada *topologia geral* (Definição 4.1).

O conceito mais importante e mais enfatizado nos cursos de topologia é o de *conjunto aberto* (Definição 3.10). No entanto, o conceito de *vizinhança* (Definição 3.1) é muito mais fundamental e mais natural, principalmente quando se faz o paralelo entre o ponto de vista da *topologia geral* e a topologia dos espaços métricos. O conceito de vizinhança é mais próximo e generaliza muito melhor o que se faz quando se utiliza argumentos com bolas, ou argumentos do tipo “epsilon e delta”, muito comuns quando tratamos de espaços métricos. Veja, por exemplo, os exercícios da seção 2.3.

3.1 Vizinhanças

Quando falamos de convergência e continuidade nos capítulos anteriores, estávamos de posse de uma métrica. A métrica nos dava a noção de distância que nos permitia falar de “proximidade”. Quando dizemos que x_n converge para x , não estamos de fato interessados nos pontos que estão “longe” de x . Estamos interessados apenas nos que estão “próximos”. De fato, poderíamos nos restringir apenas a bolas “pequenas”. Poderíamos nos restringir a bolas de raio menor que 1. Ou então, a bolas de raio $\frac{1}{2^n}$. Ou, de modo um pouco mais geral, poderíamos nos restringir a bolas de raio $\varepsilon_n > 0$, onde ε_n é uma sequência qualquer tal que $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

Quando x_n converge para x , é porque se V é um conjunto que contém x e é de certa forma um conjunto *suficientemente grande*, conterá toda a sequência x_n , exceto para uma quantidade finita de índices n . Esse *suficientemente grande*, no caso de espaços métricos, significa que existe uma bola B centrada em x tal que $B \subset V$. A esses conjuntos *suficientemente grandes*, chamamos de *vizinhanças de x* . (veja a Proposição 2.9)

Definição 3.1. *Seja X um espaço métrico e $x \in X$. Todo conjunto $V \subset X$ que contém uma bola centrada em x é chamado de vizinhança de x . Denotamos por $\mathcal{V}(x)$ o conjunto de todas as vizinhanças do ponto x .*

É imediato que toda bola centrada em x é uma vizinhança de x . Mais do que isso, pela Proposição 1.4, uma bola é vizinhança de todos os seus pontos. Esta propriedade está formalizada na proposição seguinte.

Proposição 3.2. *Se $B \subset X$ é uma bola em um espaço métrico X . Então,*

$$y \in B \Rightarrow B \in \mathcal{V}(y).$$

Ou seja, uma bola é vizinhança de todos os seus pontos.

Demonstração. Veja a Proposição 1.4. Ou, para um argumento mais visual, compare as Figuras 1.3 e 3.1. □

A seguir, apresentamos algumas propriedades elementares das vizinhanças de um ponto.

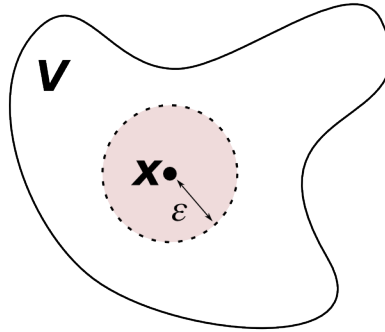


Figura 3.1: O conjunto V é uma vizinhança x pois é “grande” o suficiente para conter uma bola centrada em x .

Proposição 3.3. *Seja X um espaço métrico e $x_n, x \in X$. Então*

$$x_n \rightarrow x$$

se, e somente se, para toda vizinhança de x , $V \in \mathcal{V}(x)$, existir $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in V.$$

Demonstração. Tome uma bola B centrada em x tal que $B \subset V$. Para esta bola existe N tal que

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in B.$$

Em particular,

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in V.$$

□

Proposição 3.4. *Seja X um espaço métrico e $x \in X$. Então valem as seguintes afirmações sobre a família $\mathcal{V}(x)$ de todas as vizinhanças de x :*

1. *Se $A \in \mathcal{V}(x)$ e $A \subset B$, então $B \in \mathcal{V}(x)$.*
2. *A interseção de duas vizinhanças de x também é uma vizinhança de x . Ou seja, se $A, B \in \mathcal{V}(x)$, então $A \cap B \in \mathcal{V}(x)$.*
3. *Se $A \in \mathcal{V}(x)$ então existe $B \subset A$ tal que $x \in B$ e B é vizinhança de todos os seus pontos.*

Demonstração. O item (1) é imediato.

O item (2) é imediato do fato que as bolas centradas em x são totalmente ordenadas. Ou seja, a que tiver o menor raio estará contida em ambos os conjuntos.

O item (3) é uma re-interpretação da Proposição 3.2. Basta tomar B como sendo uma bola centrada em x contida em A . □

Observação 3.5. Das propriedades listadas na Proposição 3.4, o item (3) é o de interpretação mais difícil. Vamos voltar a discutí-lo no em vários momentos durante a exposição sobre topologia geral, e principalmente no Capítulo ???. Uma das implicações do item (3), é a seguinte. A explicação pode ser acompanhada na Figura 3.2. Seja $V \in \mathcal{V}(x)$. Suponha que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenhamos uma sequência $x_m^n \notin V$, indexada por m , que converge para x_n . Então, não é possível que a sequência x_n convirja para x . De fato, o item (3) da Proposição implica na existência de uma vizinhança aberta de x contida em V . Vamos chamar essa vizinhança de B , que na figura representamos sugestivamente como uma “bola”. Assim, se tivéssemos que x_n converge para x , teríamos que para algum $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in B$. Como B também é vizinhança de x_k (já que é vizinhança de todos os seus pontos), e como $x_m^k \rightarrow x_k$, teríamos que para algum $j \in \mathbb{N}$, $x_j^k \in B$. Contrariando o fato de que $x_j^k \notin V$.

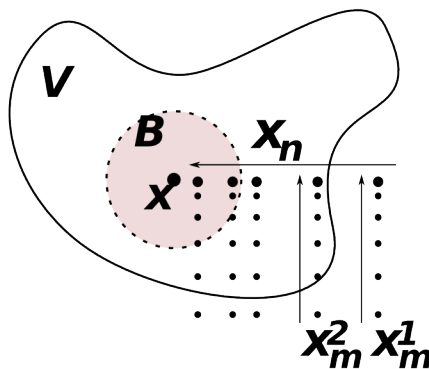


Figura 3.2: Se $x_n \rightarrow x$, então algum x_m^n pertence a V . Este fato se deve ao item (3) da Proposição 3.4.

Exercícios

3.1.1. Em um espaço métrico X , dado um ponto qualquer $x \in X$, existe uma família enumerável de vizinhanças $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}(x)$ tal que para toda vizinhança $V \in \mathcal{V}(x)$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset V$, e tal que se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, teremos que $B_1 \subset B_2$ ou $B_2 \subset B_1$.

3.1.2. Seja $\varepsilon_n > 0$ uma sequência de números reais positivos tal que $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Mostre que, em um espaço métrico X ,

$$\mathcal{V}(x) = \{V \subset X \mid \exists n \in \mathbb{N}, B_{\varepsilon_n}(x) \subset V\}.$$

3.1.3. Seja X um espaço métrico, $x \in X$, e \mathcal{B} a família de todas as bolas de X que contém x . Mostre que

$$\mathcal{V}(x) = \{V \subset X \mid \exists B \in \mathcal{B}, B \subset V\}.$$

3.1.4. Mostre que em um espaço métrico, $V \in \mathcal{V}(x)$ se, e somente se, para toda sequência $x_n \rightarrow x$, o conjunto

$$N_V = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \notin V\}$$

for finito.

3.1.5. Mostre, usando o exercício 3.1.1 e as proposições 3.2 e 3.3, que em um espaço métrico, se x_n é uma sequência convergindo para x , e x_n^m é uma sequência (indexada por m) convergindo para x_n , então existem sequências ilimitadas $n_k, m_k \in \mathbb{N}$, tais que $x_{n_k}^{m_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$.

3.2 Continuidade em um Ponto

Usando vizinhanças para expressar continuidade a formulação fica muito simples. O trabalho todo já foi feito na Proposição 2.10.

Notação. Seja X um conjunto. Chamamos de partes de X , e denotamos por $\mathcal{P}(X)$, a família formada por todos os subconjuntos de X . Assim, podemos olhar para f^{-1} como sendo a aplicação

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathcal{P}(Y) &\rightarrow \mathcal{P}(X) \\ A &\mapsto f^{-1}(A) \end{aligned} .$$

Se $f : X \rightarrow Y$ e $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(Y)$, escrevemos $f^{-1}(\mathcal{F})$ para indicar a família

$$f^{-1}(\mathcal{F}) = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{F}\}.$$

Proposição 3.6. Sejam X e Y espaços métricos. Então $f : X \rightarrow Y$ é contínua em $a \in X$ se, e somente se,

$$f^{-1}(\mathcal{V}(f(a))) \subset \mathcal{V}(a).$$

Demonstração. Tome $V \in \mathcal{V}(f(a))$. Então existe uma bola B centrada em $f(a)$, tal que $B \subset V$. Pela Proposição 2.10, $f^{-1}(B) \in \mathcal{V}(a)$. Como $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(V)$, temos que $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$.

Por outro lado, se $f^{-1}(\mathcal{V}(f(a))) \subset \mathcal{V}(a)$, teremos que em particular $f^{-1}(B) \in \mathcal{V}(a)$ para toda bola centrada em $f(a)$. Ou seja, $f^{-1}(B)$ contém uma bola centrada em a para toda bola B centrada em $f(a)$. Novamente, pela Proposição 2.10, isso implica que f é contínua em a . \square

Em se tratando de espaços métricos, tanto a definição 2.6, quanto qualquer uma de suas formulações equivalentes dadas pelas proposições 2.10 e 3.6, poderiam ser utilizadas como a definição de continuidade em um ponto. Poderíamos ter escolhido um caminho diferente e adotado uma definição de continuidade no estilo

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Cada caracterização enfatiza um aspecto diferente do fenômeno de continuidade. É importante que não nos acomodememos a apenas uma delas, mas que escolhamos a mais adequada a cada situação.

3.3 Base de Vizinhanças

Quando definimos o que seriam as vizinhanças de um ponto $x \in X$ de um espaço métrico, utilizamos as bolas centradas em x . Chamando de \mathcal{B} a família das bolas centradas em x , temos que

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{V}(x).$$

Além do mais, todo conjunto $V \in \mathcal{V}(x)$ contém um conjunto $B \in \mathcal{B}$. Ou seja, a sub-família \mathcal{B} determina quais são as vizinhanças de x . Poderíamos ter nos restringido às bolas de raio $\frac{1}{n}$ para compor a família \mathcal{B} . As vizinhanças “geradas” por essa nova família \mathcal{B} seriam exatamente as mesmas.

Definição 3.7. *Seja $\mathcal{V}(x)$ a família de todas as vizinhanças de $x \in X$, onde X é um espaço métrico. Então, dizemos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}(x)$ é uma base de vizinhanças de x quando*

$$\mathcal{V}(x) = \{V \subset X \mid \exists B \in \mathcal{B}, \text{ com } B \subset V\}$$

Proposição 3.8. *Seja X um espaço métrico e $x \in X$. Seja também \mathcal{B} uma base de vizinhanças de x . Então, uma sequência x_n converge para x se, e somente se, para todo $B \in \mathcal{B}$ existir $N = N(B) \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in B.$$

Demonstração. Dado $V \in \mathcal{V}(x)$, escolha $B \in \mathcal{B}$ satisfazendo $B \subset V$. Então, por hipótese, existe $N = N(B) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N(V) = N(B) \Rightarrow x_n \in B \subset V.$$

Portanto, $x_n \rightarrow x$. \square

Proposição 3.9. *Sejam X e Y espaços métricos e $f : X \rightarrow Y$. Sejam $a \in X$ e \mathcal{B} uma base de vizinhanças de $f(a)$. Então, f é contínua em a se, e somente se,*

$$f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{V}(a).$$

Demonstração. Pela Proposição 3.6, basta mostrar que

$$f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{V}(a) \Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{V}(f(a))) \subset \mathcal{V}(a).$$

Uma direção é óbvia, já que $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}(f(a))$. Suponha então que $V \in \mathcal{V}(f(a))$. Neste caso, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset V$. Assim, $f^{-1}(V) \supset f^{-1}(B) \in \mathcal{V}(a)$. Portanto, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$. \square

A aplicação mais imediata da proposição é a equivalência entre as seguintes afirmações, que são definições alternativas para a continuidade de f no ponto a :

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x, a) < \frac{1}{m} \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \frac{1}{n}.$$

3.4 Conjuntos Abertos

Um conjunto aberto é um conjunto que é vizinhança de todos os seus pontos. A Proposição 1.4 mostra que em um espaço métrico, todas as bolas são abertas. Por isso, muitos autores usam a expressão *bola aberta* para se referirem ao que neste livro definimos como *bola*. Ainda vamos formalizar isso melhor, mas os conjuntos abertos caracterizam toda a topologia do espaço, haja visto que a família

$$\mathcal{A}_x = \{V \in \mathcal{V}(x) \mid V \text{ é aberto}\}$$

é uma base de vizinhanças de x para todo $x \in X$. (veja o item (3) da Proposição 3.4)

Conhecendo todos os conjuntos abertos, sabemos quem são as sequências convergentes, quais funções são ou não contínuas e, conforme já mencionado, quais são as vizinhanças de um ponto.

Definição 3.10. *Seja X um espaço métrico. Dizemos que um conjunto $A \subset X$ é aberto quando satisfaz*

$$x \in A \Rightarrow A \in \mathcal{V}(x).$$

Definição 3.11. *Dado um espaço métrico (X, d) , a topologia de X induzida por d , denotada por τ_d — ou, mais comumente, por um abuso de notação, denotada por τ_X — é a família de todos os abertos de X . Isto é,*

$$\tau_X = \{A \subset X \mid A \text{ é aberto}\}.$$

Proposição 3.12. *Seja X um espaço métrico e $x \in X$. Então a família*

$$\mathcal{A}_x = \mathcal{V}(x) \cap \tau_X$$

é uma base de vizinhanças de x .

Demonstração. Basta notar que, chamando de \mathcal{B} a coleção de todas as bolas centradas em x ,

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_x \subset \mathcal{V}(x).$$

Como \mathcal{B} é uma base de vizinhanças de x , qualquer família “entre” \mathcal{B} e $\mathcal{V}(x)$ também é uma base de vizinhanças de x . (porquê?) \square

Proposição 3.13. *Seja X um espaço métrico. Então, τ_X tem as seguintes propriedades:*

1. $\emptyset, X \in \tau_X$.
2. Se $A, B \in \tau_X$, então $A \cap B \in \tau_X$.
3. Se $A_\lambda \in \tau_X$ para uma família qualquer de índices $\lambda \in \Lambda$, então $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau_X$.

Demonstração. Para o item (1), é fácil ver que X é vizinhança de qualquer ponto $x \in X$. Para o conjunto vazio... note que todos os elementos do conjunto vazio satisfazem a propriedade que você quiser. Neste caso, a propriedade de terem \emptyset como vizinhança. Em suma:

$$x \in \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{V}(x).$$

E portanto, $\emptyset \in \tau_X$.

O item (2) é consequência do item (2) da Proposição 3.4. Ou seja, se $x \in A \cap B$, como A e B são vizinhanças de x , então $A \cap B$ também é. Assim, $A \cap B$ é vizinhança de todos os seus pontos.

Do mesmo modo, o item (3) é consequência do item (1) da Proposição 3.4, pois

$$x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \Rightarrow \exists \lambda \in \Lambda, x \in A_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathcal{V}(x).$$

Ou seja, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ é vizinhança de todos os seus pontos e é portanto aberto. \square

Proposição 3.14. *Seja X um espaço métrico e $A \subset X$. Então, são equivalentes:*

1. O conjunto A é aberto.
2. O conjunto A pode ser escrito como uma união de bolas.

Demonstração. Se A é aberto, então para cada ponto $x \in A$ existe uma bola B_x centrada em x e contida em A . Desta forma, é evidente que

$$A = \bigcup_{x \in A} B_x.$$

Ou seja, A é uma união de bolas.

Por outro lado, sabemos que as bolas são conjunto abertos. Assim, qualquer conjunto que seja uma união de bolas é, pelo item (3) da Proposição 3.13, um conjunto aberto. \square

Sequências e Convergência com Abertos

Dado um espaço métrico X . Podemos caracterizar o fenômeno de convergência em termos de sua topologia τ_X ? De fato, para dizer se $x_n \in X$ converge ou não para um certo $x \in X$, de acordo com a Proposição 3.8, precisamos apenas conhecer uma base de vizinhanças de x qualquer. Sabemos que os abertos que contém x formam uma base de vizinhanças de x . Sendo assim, concluímos que x_n converge para x se, e somente se, para todo aberto A que contenha o ponto x existir $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in A.$$

3.5 Continuidade em Todo Ponto

Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ entre espaços métricos X e Y é contínua quando é contínua em todo ponto do seu domínio. Se considerarmos $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$, a função f será contínua em $x \in X$ quando f^{-1} levar vizinhanças de $f(x)$ em vizinhanças de x . Sendo assim, para f contínua, se $A \subset Y$ for um conjunto aberto (vizinhança de todos os seus pontos), então $f^{-1}(A)$ será também vizinhança de todos os seus pontos. Ou seja, se f é contínua, então $f^{-1}(\tau_Y) \subset \tau_X$. Vamos formalizar isso.

Proposição 3.15. *Sejam X e Y espaços métricos, e $f : X \rightarrow Y$ uma função qualquer. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. A função f é contínua em todo ponto de X .
2. A imagem inversa de um aberto é também um conjunto aberto. Ou seja, $f^{-1}(\tau_Y) \subset \tau_X$.

Demonstração. ■ (2) \Rightarrow (1)

Seja $A \in \tau_Y$. Então, para todo $x \in f^{-1}(A)$ temos que A é vizinhança de $f(x)$, e pela Proposição 3.6, $f^{-1}(A)$ é vizinhança de x . Ou seja, $f^{-1}(A)$ é aberto.

■ (1) \Rightarrow (2)

Sabemos pela Proposição 3.12 que para todo $x \in X$,

$$\mathcal{A}_{f(x)} = \mathcal{V}(f(x)) \cap \tau_Y$$

é uma base de vizinhanças de $f(x)$. Pelo item (2), temos que $f^{-1}(\mathcal{A}_{f(x)})$ é aberto e obviamente contém x . Ou seja, $f^{-1}(\mathcal{A}_{f(x)}) \in \mathcal{V}(x)$. Pela Proposição 3.9, segue que f é contínua em x . \square

O exemplo seguinte mostra que nem toda bijeção contínua tem inversa contínua.

Exemplo 3.16. Considere $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ e (\mathbb{R}, d_d) os espaços métricos dados pelos números reais com a métrica euclidiana (Exemplo 1.8) e a métrica discreta (Exemplo 1.9), respectivamente. Então, a aplicação identidade

$$\text{id} : (\mathbb{R}, d_d) \rightarrow (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$$

é contínua, mas sua inversa não é. De fato, na topologia dada pela métrica discreta, todos os conjuntos são abertos. Ou seja, $\tau_{d_d} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

E o que significa então dizer que $f : X \rightarrow Y$ é bijetiva, contínua e sua inversa é contínua? O fato de ser uma bijeção implica que podemos identificar os pontos de X com os pontos de Y . O fato de ser contínua com inversa contínua significa que com essa identificação as estruturas topológicas τ_X e τ_Y também são identificadas. Esse tipo de função f é chamada de *homomorfismo*. De modo geral, quando $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ é uma função bijetiva qualquer, contínua ou não, com inversa também podendo ser ou não contínua, podemos transportar a métrica d_Y para X como feito no Exemplo 1.14:

$$d'(a, b) = d_Y(f(a), f(b)).$$

Desta forma, reduzimos o problema ao caso da aplicação identidade

$$\text{id} : (X, d_X) \rightarrow (X, d'),$$

pois a aplicação f será contínua (ou sua inversa será contínua) se, e somente se, a identidade o for. Em outras palavras, dizer que f é contínua é o mesmo que dizer que $\tau_{d'} \subset \tau_{d_X}$. Dizer que a inversa de f é contínua, é o mesmo que dizer que $\tau_{d_X} \subset \tau_{d'}$. Assim, f será um homeomorfismo quando $\tau_{d'} = \tau_{d_X}$.

Definição 3.17. *Se X e Y são espaços métricos, então uma função $f : X \rightarrow Y$ é chamada de homomorfismo quando é bijetiva, contínua com inversa também contínua.*

Parte II

Topologia Geral

Motivação e Definições

4.1 Motivação

Esta seção não é formal. Nosso propósito aqui é apenas dar motivação para as definições e propriedades que serão estudadas nas seções seguintes. Se o leitor não se sentir confortável com as divagações desta seção, pode omití-la sem problemas.

Nossa motivação é obviamente o estudo que acabamos de fazer de *espaços métricos*. Devidamente motivados pelo estudo feito na primeira parte do livro, vamos abstrair o que seria a essência dos fenômenos de *convergência* e *continuidade*. Uma alternativa seria associar ao espaço X em questão uma estrutura que identificasse, para cada um dos pontos $x \in X$, quais são e quais não são as sequências que convergem para x . Uma deficiência desta abordagem está na dependência para com o conjunto dos números naturais, que indexam as tais sequências. Futuramente, veremos que uma solução alternativa é o uso de *redes* em substituição ao de sequências. Esta abordagem será feita no Capítulo ??.

Outra maneira seria associar a X uma estrutura que indicasse, quais são os conjuntos que formam as “vizinhanças” de cada ponto de X . A família das vizinhanças de $x \in X$, denotadas por $\mathcal{V}(x)$, indica do que é que x está “próximo” e do que é que está “afastado”. O ponto x está próximo de um conjunto $B \in X$ quando para todo $V \in \mathcal{V}(x)$, tivermos $B \cap V \neq \emptyset$. A palavra “próximo” está entre aspas porque esse não é o termo matemático utilizado. Dizemos que x está no *fecho* de B (Definição 6.1), ou que é um ponto de *aderência* de B .

As famílias $\mathcal{V}(x)$ deveriam satisfazer as propriedades listadas na Proposição 3.4. O item (1) não gera grandes polêmicas. Para que um conjunto esteja próximo do ponto, tem que interceptar todas as suas vizinhanças, portanto, acrescentar conjuntos maiores não modificaria a “convergência”. Talvez o nome “vizinhança” não seja realmente uma boa escolha, já que sugere que sejam conjuntos pequenos. Mas ao contrário disso, as vizinhanças são conjuntos que são grandes o suficiente para conter uma bola, no caso dos espaços métricos. Quando dizemos

[...] para todas as vizinhanças [...],

geralmente estamos omitindo uma referência a uma expressão do tipo “por menores que sejam”. Em uma conversa, se quiséssemos enfatizar, diríamos

[...] para todas as vizinhanças, **por menores que sejam** [...]

Esse tipo de argumento poderia ser restrito às vizinhanças “pequenas”, e é por isso que existe a noção de *base de vizinhanças de um ponto* (Veja a Definição 3.7 e a Proposição 3.8). Assim, o item (1) se presta mesmo a maximizar a família $\mathcal{V}(x)$ de modo que o fenômeno de convergência não seja alterado.

Do ponto de vista do fenômeno de convergência, o item (2) também serve ao mesmo propósito de maximizar a família $\mathcal{V}(x)$. Isso porque, se para $U, V \in \mathcal{V}(x)$, existem $N_U, N_V \in \mathbb{N}$ tais que

$$\begin{aligned} n \geq N_U &\Rightarrow x_n \in U \\ n \geq N_V &\Rightarrow x_n \in V, \end{aligned}$$

então, fazendo $N_{U \cap V} = \max\{N_U, N_V\}$,

$$n \geq N_{U \cap V} \Rightarrow x_n \in U \cap V.$$

Assim, se U e V são vizinhanças de x , levar ou não em consideração o conjunto $U \cap V$ como sendo vizinhança de x não afetaria o fenômeno de convergência. O que não é convergente continua não convergente, e o que é convergente permanece convergente. Já do ponto de vista da idéia de “proximidade”, a condição do item (2) garante que se dois conjuntos A e B estão longe de x , então a união $A \cup B$ também está longe de x . Veja a Figura 4.1. Em espaços métricos, todos os pontos estão distantes uns dos outros. Assim, nenhum conjunto finito está “próximo” de x , a menos que o contenha. Por outro lado, uma sequência *infinita* de pontos x_n distintos de x pode convergir para x . No caso de espaços topológicos gerais, é possível que uma família infinita de conjuntos A_n “afastados” de x seja tal que $\bigcup A_n$ esteja “próximo” de x , mas as uniões finitas estarão sempre “afastados” de x .

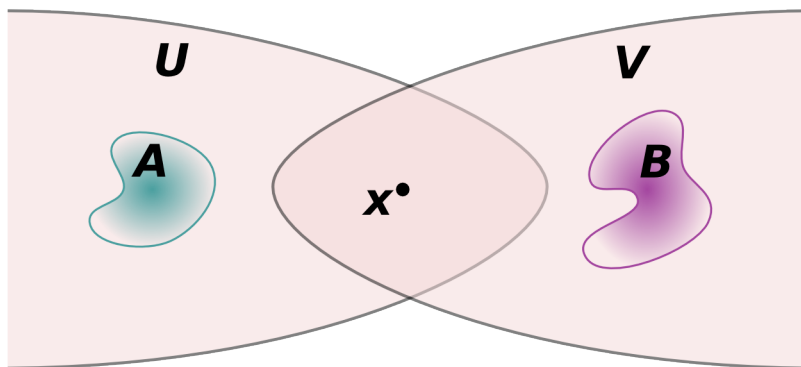


Figura 4.1: O conjunto A está “afastado” de x por não interceptar a vizinhança V . Da mesma forma, B também está “afastado” de x . Então, a união $A \cup B$ também está “afastada” de x , pois $U \cap V$ é vizinhança de x .

O item mais difícil de aceitar da Proposição 3.4, é o item (3). Como já mencionamos anteriormente (Observação 3.5), este item serve para garantir que se $x_m^n \rightarrow x_n$ e para alguma vizinhança $V \in \mathcal{V}(x)$ for verdade que $x_m^n \notin V$, então não é possível acontecer que $x_n \rightarrow x$. É equivalente a dizer que os abertos que contém $x \in X$ formam uma base de vizinhanças de X . É o que garante que se conhecermos os abertos, conheceremos toda a topologia.

Uma outra interpretação para o item (3) pode ser vista através da Figura 4.2. Suponha que $A \subset X$ é um conjunto “afastado” de x , e $L \subset X$ é tal que A está próximo de todos os pontos de L . Então, L também é um conjunto “afastado” de x . De fato, se toda vizinhança V de x intersecta L , a condição do item (3) garante a existência de uma vizinhança aberta de x U contida em V . Esta vizinhança U intersecta L , mas por ser um conjunto *aberto*, U é também vizinhança dos pontos $y \in U \cap L$. Como estes pontos estão “próximos” de A , temos que U e, a fortiori, V intersectam A . Ou seja, toda vizinhança de x intersecta A e portanto, A está “próximo” de x . Mais adiante, veremos que a condição imposta ao conjunto L é o mesmo que dizer que L está no *fecho* (Definição 6.1) de A . E a condição do item (3) equivale a dizer que a *operação de fecho* é *idempotente*. (veja o item (4) da Proposição 6.4)

Já que nossa tentativa de definir “topologia” de um modo abstrato utilizando o conceito de *vizinhança* passa necessariamente pela idéia de *conjunto aberto*, e os conjuntos abertos por si só determinam o que vem a ser uma vizinhança de x (é um conjunto que contém um *aberto* que contém x — Proposição 3.12), a opção que vamos adotar, ao menos por enquanto, é a de definir a topologia especificando quais seriam os conjuntos abertos. Para um conjunto X , escolhemos $\tau_X \subset \mathcal{P}(X)$ de modo que τ_X tenha as propriedades listadas na Proposição 3.13. Essas propriedades são semelhantes às correspondentes para “vizinhanças”. Dizer que $X \in \tau_X$ é o mesmo que dizer que todo ponto tem ao menos uma vizinhança (aberta).

4.2 Definição

Agora que, na medida do possível, devidamente motivados, vamos definir o que vem a ser uma topologia em um conjunto X qualquer.

Definição 4.1 (Espaço Topológico). *Seja X um conjunto qualquer. Dizemos que uma família $\tau_X \subset \mathcal{P}(X)$ define uma topologia no espaço X , ou que (X, τ_X) é um espaço topológico, quando τ_X satisfaz:*

1. $\emptyset, X \in \tau_X$.

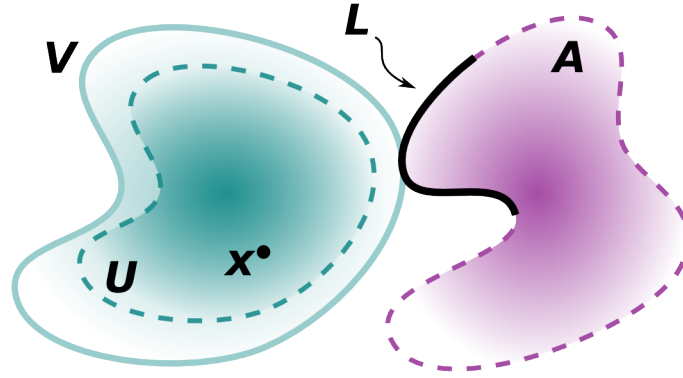


Figura 4.2: Todos os pontos de L estão “próximos” de A , que por sua vez, está “afastado” de x . Então L também está afastado de x , pois se existisse $y \in L \cap U$, então U seria vizinhança de y e, por hipótese, intersectaria A .

2. A família τ_X é fechada por interseção finita:

$$A, B \in \tau_X \Rightarrow A \cap B \in \tau_X.$$

3. A família τ_X é fechada por união arbitrária:

$$A_\lambda \in \tau_X (\lambda \in \Lambda) \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau_X.$$

Os subconjuntos $A \subset X$ tais que $A \in \tau_X$ são chamados de abertos do espaço topológico (X, τ_X) . Por um abuso de notação, quando conveniente, dizemos que X é um espaço topológico.

A topologia de um espaço métrico, definida em 3.11 é de fato, pela Proposição 3.13, uma topologia no sentido da Definição 4.1. Vejamos outros exemplos de topologia.

Exemplos

Exemplo 4.2 (Topologia Discreta). Dado um conjunto qualquer X , $(X, \mathcal{P}(X))$ é um espaço topológico. Esta topologia é induzida, por exemplo, pela métrica discreta mencionada no Exemplo 1.9.

Exemplo 4.3 (Topologia Trivial (caótica)). Dado um conjunto qualquer X , $(X, \{\emptyset, X\})$ é um espaço topológico. Se o conjunto X tiver mais do que um elemento, essa topologia nunca é dada (induzida) por uma métrica, pois não satisfaz a Proposição 1.6.

Exemplo 4.4 (Topologia da Continuidade Inferior). Considere os números reais \mathbb{R} e a seguinte família de subconjuntos de \mathbb{R}

$$\tau = \{(\alpha, \infty) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Neste caso, (\mathbb{R}, τ) é um espaço topológico. Assim como no Exemplo 4.3, essa topologia também não é induzida por uma métrica.

Do mesmo modo, existe a topologia da *Continuidade Superior*, dada por

$$\tau = \{(-\infty, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Exemplo 4.5 (Topologia Inicial). Seja X um conjunto e (Y, τ_Y) um espaço topológico. Considere uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ qualquer. Então $(X, f^{-1}(\tau_Y))$ é um espaço topológico.

4.3 Vizinhanças e Base de Vizinhanças de um Ponto

Assim como fizemos para espaços métricos, podemos definir para um espaço topológico (X, τ_X) , o que é para cada ponto $x \in X$, a família de todas as suas vizinhanças.

Definição 4.6. *Seja (X, τ_X) um espaço topológico. Dado $x \in X$, uma vizinhança aberta de x é um aberto $A \in \tau_X$ que contém o ponto x . Uma vizinhança de x é qualquer conjunto que contenha uma vizinhança aberta de x . Denotamos por $\mathcal{V}(x)$ a família de todas as vizinhanças de x .*

Observação 4.7. Alguns autores usam o termo *vizinhança* para designar apenas as vizinhanças abertas. Provavelmente, a causa disso, é a sobrevalorização dos conjuntos abertos. Em muitos casos, onde seria melhor considerar vizinhanças, muitos matemáticos insistem em enxergar apenas os conjuntos abertos. Neste livro, se quisermos uma vizinhança aberta de x , diremos “vizinhança aberta de x ”, ou simplesmente, “um aberto que contém x ”. Caso contrário, diremos apenas *vizinhança* para o que outros autores chamariam de “um conjunto que contém uma vizinhança aberta de x ”.

Em um espaço topológico qualquer, as vizinhanças de um ponto possuem as mesmas propriedades para o caso de espaços métricos que as descritas na Proposição 3.4.

Proposição 4.8. *Seja X um espaço topológico, e $x \in X$ um ponto de X . Então valem as seguintes afirmações sobre a família $\mathcal{V}(x)$ de todas as vizinhanças de x :*

1. *Se $A \in \mathcal{V}(x)$ e $A \subset B$, então $B \in \mathcal{V}(x)$.*
2. *A interseção de duas vizinhanças de x também é uma vizinhança de x . Ou seja, se $A, B \in \mathcal{V}(x)$, então $A \cap B \in \mathcal{V}(x)$.*
3. *Se $A \in \mathcal{V}(x)$ então existe $B \subset A$ tal que $x \in B$, e B é vizinhança de todos os seus pontos.*

Demonstração. Todos os itens são evidentes da definição de vizinhança. O item (2) é consequência do fato de τ_X ser fechado por interseção finita. \square

Assim como no caso de espaços métricos, podemos caracterizar os conjuntos abertos como sendo aqueles que são vizinhanças de todos os seus pontos.

Proposição 4.9. *Dado um espaço topológico X , um conjunto $A \subset X$ é aberto se, e somente se, for vizinhança de todos os seus pontos.*

Demonstração. Pela definição de vizinhança, um conjunto aberto é evidentemente vizinhança de todos os seus pontos. Suponha então que $A \subset X$ é vizinhança de todos os seus pontos. Vamos mostrar que A é aberto.

Por hipótese, para cada $a \in A$ existe um aberto U_a tal que $a \in U_a \subset A$. Neste caso,

$$A = \bigcup_{a \in A} U_a.$$

Como A é uma união de abertos U_a , temos que A também é aberto. \square

Definição 4.10. *Seja (X, τ_X) um espaço topológico e $x \in X$ um ponto qualquer de x . Uma família formada por vizinhanças de x , $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}(x)$, é chamada de base de vizinhanças de x quando para toda vizinhança $V \in \mathcal{V}(x)$ existir $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset V$. Se todos os conjuntos de \mathcal{B} forem abertos, ou seja, se $\mathcal{B} \subset \tau_X$, então diremos que \mathcal{B} é uma base de vizinhanças abertas de x .*

Observação 4.11. Alguns autores dizem *base local* ao invés de *base de vizinhanças*.

Agora que, mesmo sem uma métrica, definimos o que vem a ser uma vizinhança de um ponto, podemos definir convergência de sequências. As sequências não serão tão importantes para a teoria geral. No entanto, motivarão a definição de *redes*; um conceito que será trabalhado no Capítulo ??.

Definição 4.12. *Seja (X, τ_X) um espaço topológico e $x_n \in X$ uma sequência de elementos de X . Dizemos que x_n converge para $x \in X$ na topologia τ_X , quando para toda vizinhança $V \in \mathcal{V}(x)$ existir $N = N(V) \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in V.$$

De maneira semelhante ao caso dos espaços métricos, denotamos tal fato por $x_n \xrightarrow{\tau_X} x$, ou simplesmente $x_n \rightarrow x$.

Observação 4.13. Novamente, como no caso métrico, para saber se uma sequência $x_n \in X$ converge para $x \in X$, basta verificar a condição da Definição 4.12 para uma base de vizinhanças de x . Em particular, assim como no caso dos espaços métricos, dados $x_n, x \in X$, teremos que $x_n \xrightarrow{\tau_X} x$ se, e somente se,

para toda vizinhança aberta A de x existe $N = N(A) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in A.$$

Isso porque a família das vizinhanças abertas de x formam uma base para $\mathcal{V}(x)$.

4.4 Continuidade em um Ponto

A essas alturas, o leitor já sabe o que será tratado nesta seção. Assim como fizemos para os espaços métricos na Seção 3.2, vamos falar sobre a continuidade de aplicações entre espaços topológicos. O leitor deve comparar a Definição 4.14 e a Proposição 3.6, que caracteriza continuidade em um ponto em espaços métricos.

Definição 4.14. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação qualquer entre X e Y . Para $x \in X$, dizemos que f é contínua em x quando*

$$f^{-1}(\mathcal{V}(f(x))) \subset \mathcal{V}(x).$$

Ou seja, quando a imagem inversa de toda vizinhança de $f(x)$ for uma vizinhança de x .

Em uma formulação mais semelhante aos argumentos do estilo $\varepsilon - \delta$, a definição de continuidade fica assim:

Para todo $V \in \mathcal{V}(f(x))$ existe $U \in \mathcal{V}(x)$ tal que

$$y \in U \Rightarrow f(y) \in V.$$

Como no caso de espaços métricos, basta verificar a condição da definição para uma base de vizinhanças de x .

Proposição 4.15. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação qualquer. Dados $x \in X$ e \mathcal{B} uma base de vizinhanças de $f(x)$. Então, f é contínua em x se, e somente se,*

$$f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{V}(x).$$

Demonstração. Se $V \in \mathcal{V}(f(x))$, então existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset V$. Portanto, $f^{-1}(V) \supset f^{-1}(B) \in \mathcal{V}(x)$. Assim, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x)$. Como V é um elemento arbitrário de $\mathcal{V}(f(x))$, temos que

$$f^{-1}(\mathcal{V}(f(x))) \subset \mathcal{V}(x).$$

□

4.5 Continuidade

Continuidade é um conceito central em topologia. Uma aplicação contínua transporta aspectos topológicos entre os espaços em questão. Dada uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ entre os conjuntos X e Y , podemos ver f^{-1} como uma aplicação

$$f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X).$$

Se (X, τ_X) e (Y, τ_Y) são espaços topológicos e f é contínua em $x \in X$, podemos olhar para f^{-1} restrita a $\mathcal{V}(f(x))$ como sendo uma aplicação

$$f^{-1} : \mathcal{V}(f(x)) \rightarrow \mathcal{V}(x).$$

A proposição a seguir demonstra que quando f é contínua em todo ponto de X , então a restrição de f^{-1} a τ_Y pode ser vista como uma aplicação

$$f^{-1} : \tau_Y \rightarrow \tau_X.$$

Proposição 4.16. *Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação de X em Y . Neste caso, são equivalentes:*

1. A função f é contínua em todo ponto $x \in X$.
2. Para todo aberto $A \in \tau_Y$, $f^{-1}(A) \in \tau_X$.

Demonstração. Para todo ponto $x \in f^{-1}(A)$, $f(x) \in A$. Então, dado $A \in \tau_Y$, temos que para todo ponto $x \in f^{-1}(A)$, como A é aberto, $A \in \mathcal{V}(f(x))$. Pela continuidade de f no ponto x , temos que $f^{-1}(A) \in \mathcal{V}(x)$. Acabamos de mostrar que $f^{-1}(A)$ é vizinhança de todos os seus pontos, e portanto, pela Proposição 4.9, $f^{-1}(A)$ é um aberto de X .

Por outro lado, para $x \in X$ qualquer, denotando por $\mathcal{B}_{f(x)}$ a família dos abertos que contém $f(x)$, como a imagem inversa desses abertos contém x , temos que

$$f^{-1}(\mathcal{B}_{f(x)}) \subset \mathcal{V}(x).$$

E como $\mathcal{B}_{f(x)}$ é uma base de $\mathcal{V}(f(x))$, temos que

$$f^{-1}(\mathcal{V}(f(x))) \subset \mathcal{V}(x).$$

Ou seja, f é contínua em x . □

Definição 4.17 (Função Contínua). *Dizemos que uma função $f : X \rightarrow Y$ entre os espaços topológicos (X, τ_X) e (Y, τ_Y) é contínua quando é contínua em todo ponto $x \in X$. Ou, equivalentemente, quando $f^{-1}(\tau_Y) \subset \tau_X$.*

Homeomorfismos

Para dois conjuntos X e Y , uma bijeção $f : X \rightarrow Y$ identifica cada ponto de X a um único ponto de Y e vice-versa. Se X e Y forem espaços topológicos, f for contínua e sua inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ também for contínua, então também serão identificados cada aberto de X com um único aberto de Y e vice-versa. Tudo o que puder ser dito sobre a topologia de X poderá ser afirmado sobre a topologia de Y através da identificação dada por f .

Definição 4.18 (Homeomorfismo). *Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que uma aplicação*

$$f : X \rightarrow Y$$

é um homeomorfismo de X em Y quando f for bijetiva, contínua e sua inversa f^{-1} também for contínua.

Quando existe um homeomorfismo entre dois espaços topológicos, dizemos que estes espaços são homeomorfos.

Aplicação Aberta

Com uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ entre espaços topológicos, podemos tentar relacionar as topologias de (X, τ_X) e (Y, τ_Y) . Se f for um homeomorfismo, sabemos que X e Y possuem exatamente a mesma topologia quando os pontos de X são identificados com os de Y através de f . Se f for uma bijeção contínua, podemos identificar cada elemento de X com um único elemento de Y . Com esta identificação, teremos que $\tau_Y \subset \tau_X$. Uma outra propriedade que f pode ter, que ajudaria a relacionar os espaços X e Y é a de levar abertos de X em abertos de Y . Neste caso, dizemos que f é uma *aplicação aberta*.

Definição 4.19. *Seja $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ uma aplicação entre os espaços topológicos X e Y . Dizemos que f é uma aplicação aberta quando $f(\tau_X) \subset \tau_Y$.*

Um homeomorfismo é uma bijeção contínua e aberta. Nossa motivação para a definição de *aplicação aberta* é simplesmente imaginar, ignorando o fato de que f pode nem mesmo ser bijetiva, o que seria necessário para que f^{-1} seja contínua. Mais adiante, veremos maneiras de se transportar topologias de um espaço topológico a um conjunto qualquer através de aplicações entre eles. Quando temos uma bijeção entre um espaço topológico e um conjunto qualquer, fica fácil transportar a topologia de um para o outro. Imagine que $f : X \rightarrow Y$, não uma bijeção, mas uma sobrejeção do espaço topológico X no espaço topológico Y . Podemos definir o conjunto

$$\tilde{X} = \{f^{-1}(y) \mid y \in Y\},$$

que nada mais é do que “agrupar” todos os elementos de X que têm a mesma imagem. A projeção natural de X em \tilde{X} é dada por

$$\begin{aligned} \pi : X &\rightarrow \tilde{X} \\ x &\mapsto f^{-1}(f(x)) \end{aligned} .$$

A projeção leva um elemento $x \in X$ na “classe” formada por todos os elementos de X que tem, por f , a mesma imagem que x . A aplicação f pode ser fatorada, de modo que o seguinte diagrama é comutativo (ou seja, $f = \tilde{f} \circ \pi$):

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ \tilde{X} & & \end{array}$$

Basta definir $\tilde{f}(f^{-1}(y)) = y$. Agora, \tilde{f} é uma bijeção. Faz sentido esperar que a topologia de X possa ser transportada para \tilde{X} , de modo que as propriedades topológicas de f possam ser investigadas em função de \tilde{f} e vice-versa. Em particular, se f for contínua e aberta, podemos esperar que \tilde{f} seja um homeomorfismo entre Y e \tilde{X} (Veja o exercício ??). Trataremos desse tipo de topologia, a topologia quociente, no Capítulo 7.

Assim como podemos falar de *continuidade em um ponto*, podemos também definir o que seria dizer que $f : X \rightarrow Y$ é aberta em $x \in X$. Assim como no caso de continuidade, a definição fica melhor se usarmos *vizinhanças de x* ao invés de abertos.

Definição 4.20. *Seja $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ uma aplicação entre os espaços topológicos X e Y . Dizemos que f é uma aplicação aberta em $x \in X$ quando $f(\mathcal{V}(x)) \subset \mathcal{V}(f(x))$.*

Construindo Topologias

5.1 Comparando Topologias

Em um mesmo conjunto X , podemos ter definidas duas topologias τ_1 e τ_2 . Pode acontecer que $\tau_1 \subset \tau_2$, por exemplo. Neste caso, sempre que $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ for contínua, teremos que $f : (X, \tau_2) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ também será contínua. Também podemos concluir que

$$x_n \xrightarrow{\tau_2} x \Rightarrow x_n \xrightarrow{\tau_1} x.$$

Pode ser que não tenhamos nem $\tau_1 \subset \tau_2$, nem $\tau_2 \subset \tau_1$. Duas topologias nem sempre são comparáveis.

Definição 5.1. Se (X, τ_1) e (X, τ_2) são duas topologias em um mesmo conjunto X e $\tau_1 \subset \tau_2$, então dizemos que τ_2 é mais forte ou mais fina que τ_1 . Também dizemos que τ_1 é mais fraca que τ_2 . Podemos também dizer que τ_1 é menor que τ_2 , ou que τ_2 é maior que τ_1 . Veja a Observação 5.3.

A topologia determina quais são as seqüências que convergem e quais não convergem. Se imaginarmos a topologia como uma “peneira” que deixa passar apenas as seqüências convergentes, quanto mais fina for a topologia, menos seqüências passarão como convergentes. Veja a Figura 5.1.

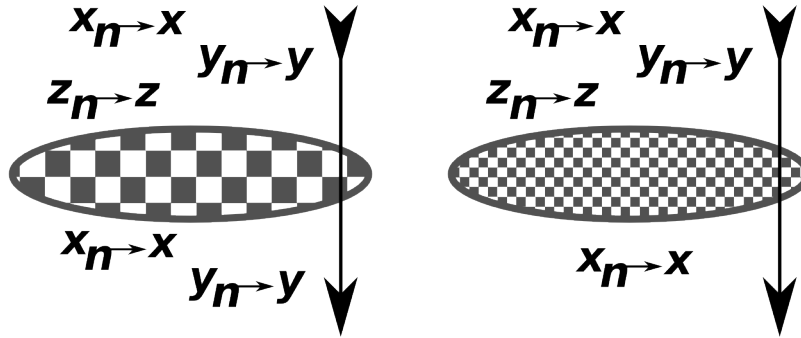


Figura 5.1: Quanto mais fina é a topologia, menos seqüências “passam” como convergentes.

Proposição 5.2. Seja X um conjunto qualquer, e τ_λ ($\lambda \in \Lambda$) uma família de topologias em X . Então $\tau_X = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda$ é uma topologia em X .

Demonstração. Basta verificar que τ_X satisfaz os axiomas listados na Definição 4.1. Por exemplo,

$$\begin{aligned} A, B \in \tau_X &\Rightarrow \forall \lambda \in \Lambda, A \cap B \in \tau_\lambda \\ &\Rightarrow A \cap B \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda = \tau_X. \end{aligned}$$

□

Observação 5.3. A relação “mais forte que” define uma *ordem parcial* na família

$$\mathcal{T}(X) = \{\tau_X \subset \mathcal{P}(X) \mid \tau_X \text{ é topologia}\},$$

das topologias de um conjunto X . Esta ordem é simplesmente a restrição da relação de inclusão definida em $\mathcal{P}(X)$ à família $\mathcal{T}(X)$.

Existe um elemento *máximo* dentre todas as topologias de X . É o conjunto das partes de X , $\mathcal{P}(X)$, que é a topologia mais forte que pode ser definida em X . Por outro lado, $\{\emptyset, X\}$ é a topologia mais fraca em $\mathcal{T}(X)$.

A Proposição 5.2 mostra que dada uma família de topologias τ_λ ($\lambda \in \Lambda$), existe a *maior topologia que é menor que todas as* τ_λ . Essa topologia τ_δ é o *ínfimo* das τ_λ . Escrevemos

$$\tau_\delta = \bigwedge \{\tau_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}.$$

ou

$$\tau_\delta = \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda.$$

Por outro lado, a união de topologias não é necessariamente uma topologia. No entanto, se considerarmos a família

$$\mathcal{F} = \left\{ \tau_X \in \mathcal{T}(X) \mid \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda \subset \tau_X \right\}$$

de todas as topologias que são maiores que todas as τ_λ , sabemos que a família \mathcal{F} não é vazia, pois $\mathcal{P}(X) \in \mathcal{F}$. Seja então τ_σ o ínfimo de \mathcal{F} :

$$\tau_\sigma = \bigwedge \mathcal{F}.$$

A topologia τ_σ é a menor topologia que é maior que todas as τ_λ . Essa topologia é o supremo de τ_λ , e é denotada por

$$\tau_\sigma = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda.$$

Comparação de Topologias e Continuidade

Quando X é um espaço topológico dotado de duas topologias τ_1 e τ_2 , o que podemos dizer da relação entre essas topologias se soubermos que a aplicação identidade

$$\begin{array}{ccc} \text{id} : & (X, \tau_1) & \rightarrow & (X, \tau_2) \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

é contínua? A resposta é simples:

$$\text{id é contínua} \Leftrightarrow \tau_2 \subset \tau_1.$$

Vamos generalizar isso para uma aplicação qualquer

$$f : (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2).$$

Proposição 5.4. *Seja X um conjunto qualquer e (Y, τ_Y) um espaço topológico. Dada uma aplicação qualquer $f : X \rightarrow Y$, $\tau_f = f^{-1}(\tau_Y)$ define uma topologia em X .*

Demonstração. Basta notar que $\emptyset, X \in \tau_f$, se $A, B \in \tau_f$, então $A = f^{-1}(A')$ e $B = f^{-1}(B')$ com $A', B' \in \tau_Y$. Como τ_Y é uma topologia, $A' \cap B' \in \tau_Y$. Assim, $A \cap B = f^{-1}(A' \cap B') \in f^{-1}(\tau_Y) = \tau_f$. Podemos fazer analogamente para a união arbitrária de elementos de τ_f . Basta observar que $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ comuta com as operações de união e interseção. \square

Pela Proposição 5.4, dizer que $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ é contínua é o mesmo que dizer que a topologia τ_f é mais fraca que τ_X . De fato, é fácil verificar que τ_f é a menor topologia que faz com que $f : X \rightarrow (Y, \tau_Y)$ seja contínua.

5.2 Sub-Base

A construção feita na Observação 5.3 é muito comum. É essa construção que em álgebra, por exemplo, nos permite definir para um espaço vetorial V e um subconjunto qualquer $S \subset V$, o menor subespaço de V que contém S . Este é o *subespaço vetorial gerado por S* . Do mesmo modo, para um grupo G e um subconjunto qualquer $S \subset G$, pode-se definir o que seria o *grupo gerado por S* . Esse seria o menor subgrupo de G que contém S . Existem exemplos também em teoria da medida. Assim, como na Proposição 5.2, a interseção de uma família de subgrupos é um subgrupo, a interseção de uma família de subespaços vetoriais é um subespaço vetorial.

Definição 5.5. *Seja X um conjunto, e $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ uma família qualquer de subconjuntos de X . Então a topologia*

$$\tau(\mathcal{C}) = \bigvee_{\mathcal{C} \subset \tau_X} \tau_X$$

é a topologia gerada por \mathcal{C} . Essa é a menor topologia de X que contém a família \mathcal{C} .

Definição 5.6. *Seja X um conjunto qualquer, e $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ uma família qualquer de subconjuntos de X . Mesmo sem definir o que venha a ser uma base para a topologia (Definição 5.13), vamos definir o conjunto*

$$\mathcal{B}(\mathcal{C}) = \left\{ \bigcap_{A \in \mathcal{C}'} A \mid \mathcal{C}' \subset \mathcal{C}, \#\mathcal{C}' < \infty \right\},$$

e chamá-lo de base induzida pela família \mathcal{C} . Aqui, usamos a convenção de que $\bigcap_{A \in \emptyset} A = X$.

Observação 5.7. Na Definição 5.6, utilizamos a seguinte convenção:

$$\bigcup_{A \in \emptyset} A = \emptyset$$

$$\bigcap_{A \in \emptyset} A = X.$$

Esta convenção se torna mais natural se, considerando a relação de ordem \subset em $\mathcal{P}(X)$, interpretarmos \bigcup e \bigcap como sendo operadores de supremo e ínfimo, assim como fizemos na Observação 5.3. Desta forma, dado $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$,

$$\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$$

é o menor subconjunto de X que é maior que todos os conjuntos em \mathcal{F} . Se \mathcal{F} é vazio, então o menor subconjunto seria justamente \emptyset . Da mesma forma,

$$\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$$

é o maior subconjunto de X que é menor que todos os conjuntos em \mathcal{F} . Se $\mathcal{F} = \emptyset$, este conjunto é simplesmente o maior subconjunto de X , que é o próprio X .

Por um abuso de notação, quando $\mathcal{C} = \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, por vezes escrevemos $\tau(A_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ no lugar de $\tau(\mathcal{C})$. E quando $\mathcal{C}_\lambda, (\lambda \in \Lambda)$ é uma coleção de famílias de subconjuntos de X , escrevemos $\tau(\mathcal{C}_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ ao invés de $\tau(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_\lambda)$. As seguintes propriedades da topologia gerada por uma família são consequência direta da definição. O leitor deve ficar atento para a diferença entre

$$\tau(\mathcal{C}_\lambda, \lambda \in \Lambda)$$

e

$$\tau(\mathcal{C}_\lambda), \lambda \in \Lambda.$$

Proposição 5.8. *Sejam \mathcal{C} e \mathcal{D} famílias de subconjuntos de X , e τ_X uma topologia em X . Então, valem as seguintes propriedades:*

1. *Todos os conjuntos em \mathcal{C} são abertos na topologia gerada: $\mathcal{C} \subset \tau(\mathcal{C})$.*
2. *Se $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$, então $\tau(\mathcal{C}) \subset \tau(\mathcal{D})$.*

3. Temos que $\mathcal{C} \subset \tau_X$ se, e somente se, $\tau(\mathcal{C}) \subset \tau_X$.
4. Se τ_X é uma topologia, então $\tau_X = \tau(\tau_X)$. Em particular, vale que

$$\tau(\tau(\mathcal{C})) = \tau(\mathcal{C}).$$

5. Se $\mathcal{C} \subset \tau_X \subset \tau(\mathcal{C})$, então $\tau_X = \tau(\mathcal{C})$.
6. Se $\mathcal{C} \subset \mathcal{D} \subset \tau(\mathcal{C})$, então $\tau(\mathcal{C}) = \tau(\mathcal{D})$.
7. Se $\mathcal{E} = \tau(\mathcal{C}) \cup \tau(\mathcal{D})$, então $\tau(\mathcal{E}) = \tau(\mathcal{C} \cup \mathcal{D})$.
8. Seja \mathcal{C}_λ , $(\lambda \in \Lambda)$ uma coleção de famílias de subconjuntos de X . Então,

$$\tau(\tau(\mathcal{C}_\lambda), \lambda \in \Lambda) = \tau(\mathcal{C}_\lambda, \lambda \in \Lambda).$$

Demonstração. Vamos mostrar apenas o item (8), que é mais difícil. O restante fica como exercício. :-)
É evidente, pelo item (2), que

$$\tau\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_\lambda\right) \subset \tau\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \tau(\mathcal{C}_\lambda)\right).$$

No entanto, novamente pelo item (2), sabemos que para todo $\gamma \in \Lambda$,

$$\tau(\mathcal{C}_\gamma) \subset \tau\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_\lambda\right).$$

E portanto,

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \tau(\mathcal{C}_\lambda) \subset \tau\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_\lambda\right).$$

Agora, pelo item (5),

$$\tau\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \tau(\mathcal{C}_\lambda)\right) = \tau\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_\lambda\right).$$

□

Forma da Topologia Gerada

Qual é a forma de um aberto de $\tau(\mathcal{C})$ quando expresso em termos de \mathcal{C} ? Obviamente que a topologia gerada por \mathcal{C} deve conter todas as interseções finitas e todas as uniões de elementos de \mathcal{C} . Mas isso nem sempre é suficiente. A Proposição 5.9 nos diz como podemos escrever os abertos da topologia gerada em termos de conjuntos da sub-base.

Proposição 5.9. *Seja \mathcal{C} uma sub-base para um espaço topológico (X, τ_X) . Ou seja, $\tau_X = \tau(\mathcal{C})$. Considere a base induzida $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{C})$ das interseções finitas de conjuntos de \mathcal{C} . Então, todos os conjuntos da topologia são uniões de conjuntos de \mathcal{B} :*

$$\tau_X = \left\{ \bigcup_{A \in \mathcal{B}'} A \mid \mathcal{B}' \subset \mathcal{B} \right\}.$$

Demonstração. A topologia $\tau(\mathcal{C})$ necessariamente contém \mathcal{B} . Assim,

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \subset \tau(\mathcal{C}).$$

Considere então, a família \mathcal{U} dada pelas uniões de elementos de \mathcal{B} :

$$\mathcal{U} = \left\{ \bigcup_{A \in \mathcal{B}'} A \mid \mathcal{B}' \subset \mathcal{B} \right\}.$$

Novamente,

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{U} \subset \tau(\mathcal{C}).$$

Para concluir que $\tau_X = \mathcal{U}$, basta mostrar que \mathcal{U} é uma topologia. Assim, como τ_X é a menor que contém \mathcal{C} , poderemos concluir que $\tau_X = \mathcal{U}$. É imediato que

$$\emptyset, X \in \mathcal{U}.$$

Também é evidente pela própria definição de \mathcal{U} , que \mathcal{U} é fechado por uniões arbitrárias. Basta então verificar que se $A, B \in \mathcal{U}$, então $A \cap B \in \mathcal{U}$. Onde, para $\mathcal{B}_A, \mathcal{B}_B \subset \mathcal{B}$ adequados,

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{U \in \mathcal{B}_A} U \\ B &= \bigcup_{V \in \mathcal{B}_B} V. \end{aligned}$$

Mas, neste caso,

$$A \cap B = \bigcup_{W \in \mathcal{B}_C} W,$$

onde $\mathcal{B}_C = \{U \cap V \mid U \in \mathcal{B}_A, V \in \mathcal{B}_B\}$. Agora, basta notar que $\mathcal{B}_C \subset \mathcal{B}$, pois \mathcal{B} é fechada por interseção finita. \square

Sub-Base e Continuidade

Se temos uma aplicação $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$, e uma sub-base \mathcal{C} de τ_Y , como podemos dizer, olhando para $f^{-1}(\mathcal{C})$, se f é ou não contínua. Um primeiro “chute” seria talvez dizer que basta que $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \tau_X$. Obviamente que esta é uma condição necessária. A proposição seguinte é o elo que falta para mostrar que a condição $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \tau_X$ é equivalente à continuidade de f .

Proposição 5.10. *Sejam X e Y dois conjuntos e $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(Y)$ uma família de subconjuntos de Y . Então,*

$$\tau(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\tau(\mathcal{C})).$$

Demonstração. Vamos utilizar a seguinte notação:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \tau(f^{-1}(\mathcal{C})) \\ \tau_2 &= f^{-1}(\tau(\mathcal{C})). \end{aligned}$$

Por definição, τ_1 é uma topologia. É fácil ver (Exemplo 4.5) que τ_2 também é uma topologia. Como $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \tau_2$, segue que

$$\tau_1 \subset \tau_2,$$

pois τ_1 é a menor topologia com tal propriedade. Resta então mostrar que dado $A \in \tau_2$, teremos $A \in \tau_1$.

Pela Proposição 5.9, dado $A \in \tau_2$, basta mostrar que A pode ser escrito como uma união arbitrária de interseções finitas de elementos de $f^{-1}(\mathcal{C})$. De fato, $A = f^{-1}(A')$, onde $A' \in \tau(\mathcal{C})$ é uma união arbitrária de interseções finitas de elementos de \mathcal{C} . Como f^{-1} comuta com as operações de união e interseção, temos a expressão desejada para A , concluindo a demonstração. \square

Conforme prometido, vamos utilizar a Proposição 5.10 para mostrar que para uma aplicação $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau(\mathcal{C}))$ ser contínua, basta que $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \tau_X$.

Proposição 5.11. *Seja $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$, onde $\tau_Y = \tau(\mathcal{C})$. Então, f é contínua se, e somente se, $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \tau_X$.*

Demonstração. É evidente que a condição é necessária. Vamos mostrar que é suficiente. Pela Proposição 5.10, temos que

$$f^{-1}(\tau_Y) = \tau(f^{-1}(\mathcal{C})).$$

Mas a hipótese $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \tau_X$ implica que $\tau(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset \tau_X$. Ou seja,

$$f^{-1}(\tau_Y) = \tau(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset \tau_X.$$

\square

Observação 5.12. Frequentemente, demonstrações de que determinada função é contínua ficam excessivamente complicadas porque o autor da demonstração refez o argumento das Proposições 5.10 e 5.11. Veja, por exemplo, a demonstração da Proposição 7.14.

Exercícios

5.2.1. Considere em \mathbb{R} sua topologia usual, τ , a topologia da continuidade inferior, τ_i e a topologia da continuidade superior, τ_s . Mostre que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, onde X é um espaço topológico qualquer, é contínua na topologia τ se, e somente se, for contínua nas topologias τ_i e τ_s .

5.2.2. Seja \mathcal{S} uma família de subconjuntos de X que não *cobre* X . Ou seja, $X \neq \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$. Considere a topologia em X gerada por \mathcal{S} , e mostre que existe $x \in X$ tal que $\mathcal{V}(x) = \{X\}$.

5.2.3. Mostre que $f : X \rightarrow Y$ é aberta se, e somente se, é aberta em todo $x \in X$.

5.2.4. Considere $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$. Se \mathcal{F} é uma família geradora da topologia τ_X , então, f é aberta se, e somente se, $f(\mathcal{F}) \subset \tau_Y$.

5.3 Bases

Dada uma família \mathcal{C} de subconjuntos de um conjunto X , a base induzida $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{C})$ tinha uma propriedade interessante:

Todo aberto de $\tau(\mathcal{B})$ é uma união de elementos de \mathcal{B} .

Cada família com essa propriedade é uma de *base da topologia*. Quando construímos a topologia dos espaços métricos, as *bolas* formavam uma base para a topologia (Proposição 3.14).

Definição 5.13. *Seja (X, τ_X) um espaço topológico. Uma família $\mathcal{B} \subset \tau_X$ é uma base para a topologia τ_X quando todo conjunto $A \in \tau_X$ puder ser escrito como uma união de elementos de \mathcal{B} . Aqui, seguimos a convenção de que $\bigcup_{A \in \emptyset} A = \emptyset$,*

Como de costume, vamos ver outras maneiras de caracterizar o que vem a ser uma base para uma topologia τ_X . Note que uma das condições da Definição 5.13 é que $\mathcal{B} \subset \tau_X$.

Proposição 5.14. *Seja (X, τ_X) um espaço topológico e $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ uma família de subconjuntos de X . Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. A família

$$\rho = \left\{ \bigcup_{A \in \mathcal{B}'} A \mid \mathcal{B}' \subset \mathcal{B} \right\}$$

é uma topologia de X . E além disso, $\tau_X = \rho$.

2. A família \mathcal{B} é uma base para τ_X .

3. Temos que $\mathcal{B} \subset \tau_X$, e para todo $x \in X$ e toda vizinhança V de x , existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset V$.

4. Para todo $x \in X$, o conjunto

$$\mathcal{B}_x = \{A \in \mathcal{B} \mid x \in A\}$$

é uma base de vizinhanças de x (veja a Definição 4.10).

5. Para todo $A, B \in \mathcal{B}$ e $x \in A \cap B$ existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $x \in C \subset A \cap B$. E além disso, $\tau_X = \tau(\mathcal{B})$ e $X = \bigcup_{A \in \mathcal{B}} A$.

Demonstração. ■ (1) \Rightarrow (2)

Pela definição de base, \mathcal{B} é uma base para ρ . Como

$$\mathcal{B} \subset \rho \subset \tau(\mathcal{B}),$$

temos que $\rho = \tau(\mathcal{B}) = \tau_X$.

■ (2) \Rightarrow (3)

Se \mathcal{B} é base para τ_X , então $\mathcal{B} \subset \tau_X$. Seja $V \in \mathcal{V}(x)$. Então, $A = \overset{\circ}{V}$ é aberto e $x \in A$. Como o conjunto A é da forma

$$A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$$

para alguma sub-família $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, basta escolher $B \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B$, para que

$$x \in B \subset A \subset V.$$

■ (3) \Rightarrow (4)

Evidentemente que $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{V}(x)$, já que a família é formada por conjuntos abertos que contém x . Basta mostrar que para toda vizinhança V de x , existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subset V$. Mas a existência de tal B é justamente a hipótese do item (3).

■ (4) \Rightarrow (5)

Se $A, B \in \mathcal{B}$ e $x \in A \cap B$, então, por hipótese, A e B são vizinhanças de x . Portanto, $A \cap B$ também é vizinhança de x . Como \mathcal{B}_x é uma base de vizinhanças de x , então existe $C \in \mathcal{B}_x$ tal que

$$x \in C \subset A \cap B.$$

Precisamos então verificar que \mathcal{B} gera τ_X . Primeiramente, note que todo conjunto $U \in \mathcal{B}$ é aberto, pois se $x \in U$, então $U \in \mathcal{B}_x \subset \mathcal{V}(x)$. Ou seja, U é vizinhança de todos os seus pontos. Assim,

$$\tau(\mathcal{B}) \subset \tau_X.$$

Por outro lado, todo aberto de τ_X pode ser escrito como uma união de elementos de \mathcal{B} , pois dado $V \in \tau_X$, para cada $x \in V$ existe $V_x \in \mathcal{B}_x \subset \mathcal{B}$ tal que $x \in V_x \subset V$. Ou seja,

$$V = \bigcup_{x \in V} V_x.$$

E portanto,

$$\tau_X \subset \tau(\mathcal{B}).$$

É evidente que $X = \bigcup_{A \in \mathcal{B}} A$, pois nenhum dos \mathcal{B}_x é vazio. (Note que acabamos provando que (4) \Rightarrow (2).)

■ (5) \Rightarrow (1)

Já sabemos que $\emptyset \in \rho$. Pela hipótese de X ser a união de todos os conjuntos em \mathcal{B} , $X \in \rho$. Por definição, ρ é evidentemente fechada por união arbitrária. Resta mostrar que é também fechada por interseção finita. Para isso, basta notar que A e B são da forma

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{U \in \mathcal{B}_A} U \\ B &= \bigcup_{V \in \mathcal{B}_B} V \end{aligned}$$

para $\mathcal{B}_A, \mathcal{B}_B \in \mathcal{B}$ adequados. Assim,

$$A \cap B = \bigcup_{(U,V) \in \mathcal{B}_A \times \mathcal{B}_B} U \cap V,$$

sendo que, é fácil verificar que as hipóteses do item (5) implicam que cada $U \cap V$ é uma união de conjuntos em \mathcal{B} . Portanto, $A \cap B \in \rho$. \square

Observação 5.15. Dada uma família qualquer $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$, a Proposição 5.9 mostra que $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ é uma base para $\tau(\mathcal{C})$. Em particular, toda família \mathcal{B} fechada por interseção finita é uma base para $\tau(\mathcal{B})$. Esse fato pode ser verificado também pelo item (5) da Proposição 5.14. Esta condição não é, no entanto, necessária para que \mathcal{B} seja uma base para $\tau(\mathcal{B})$. As bolas, por exemplo, formam uma base para a topologia de um espaço métrico, mas não é necessariamente verdade que a interseção de duas bolas será uma bola.

Corolário 5.16. *Seja \mathcal{B} uma família de subconjuntos de X , com $X = \bigcup_{A \in \mathcal{B}} A$. Para que \mathcal{B} seja uma base de $\tau(\mathcal{B})$ é necessário e suficiente que para todo $A, B \in \mathcal{B}$, $A \cap B$ possa ser escrito como união de elementos de \mathcal{B} .*

Demonstração. A condição é evidentemente necessária. Para ver que é suficiente, basta verificar as condições do item (5) da Proposição 5.14. Evidentemente que \mathcal{B} gera $\tau(\mathcal{B})$. O restante da demonstração fica como exercício. \square

Sub-Base e Convergência

A convergência de uma sequência $x_n \rightarrow x$ pode ser entendida como:

Para toda vizinhança V de x , por menor que seja, existe N tal que

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in V.$$

A expressão “por menor que seja” é um aposto, e é supérflua, mas traduz bem o fato de a convergência poder ser descrita em termos de bases, ou bases de vizinhanças (veja a Observação 4.13 e a Proposição 5.14). O fenômeno da convergência pode ser ainda mais fácil de ser verificado se utilizarmos uma sub-base ao invés de uma base.

Proposição 5.17. *Seja \mathcal{S} uma sub-base de um espaço topológico. Então, uma sequência x_n converge para x se, e somente se, para todo $V \in \mathcal{S}$, com $x \in V$, existir $N = N(V)$ tal que*

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in V.$$

Demonstração. Seja \mathcal{B} a base gerada por \mathcal{S} . Basta mostrarmos que a condição garante que para todo $U \in \mathcal{B}$, com $x \in U$, existir $N = N(U)$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in U.$$

Note que ou $U = X$ (neste caso, basta tomar $N = 1$), ou $U = V_1 \cap \dots \cap V_n$, com $V_j \in \mathcal{S}$. Neste último caso,

$$N(U) = \max(N(V_1), \dots, N(V_n))$$

satisfaz a condição desejada. \square

Exercícios

5.3.1. Mostre que a família

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \subset \mathbb{R} \mid a \in \mathbb{Q}, b \notin \mathbb{Q}\}$$

é uma base para a topologia usual de \mathbb{R} .

5.3.2. Toda base é fechada por interseção finita não vazia? Demonstre que sim, ou dê um contra exemplo.

5.3.3. Complete a demonstração do Corolário 5.16.

5.4 Cardinalidade das Bases e Sub-Bases

Principalmente quando trabalhamos com sequências de elementos, ou mesmo sequências de conjuntos, a existência ou não de bases ou bases de vizinhanças que sejam enumeráveis torna-se uma questão importante.

Definição 5.18. *Dizemos que um espaço topológico X é segundo-enumerável quando possuir uma base enumerável. Se todo $x \in X$ possui uma base enumerável de vizinhanças, dizemos que X é primeiro-enumerável.*

Observação 5.19. A nomenclatura da Definição 5.18 é uma tradução direta da língua inglesa — *first countable* e *second countable* —, e é muito ruim. Se um espaço topológico X possui uma base enumerável, não seria melhor dizer que X possui base enumerável? Da mesma forma, neste livro, vamos dizer que $x \in X$ possui base enumerável de vizinhanças. Ao invés de dizer *primeiro-enumerável*, vamos simplesmente dizer que todo ponto de X possui base enumerável de vizinhanças.

Exemplo 5.20 (Espaço Métrico). Em um espaço métrico X , um ponto qualquer possui uma base enumerável de vizinhanças. De fato, dado x , as bolas de raio $\frac{1}{n}$ centradas em x formam uma base de vizinhanças. Essa base de vizinhanças tem a propriedade de poder ser ordenada de forma decrescente. Ou seja,

$$B_{\frac{1}{n}}(x) \supset B_{\frac{1}{n+1}}(x).$$

Esta é a propriedade que nos permitiu estabelecer a equivalência entre continuidade com bolas e continuidade com seqüências para aplicações entre espaços métricos. Veja a Proposição 2.10.

Na Definição 5.18, não mencionamos nada sobre a cardinalidade das sub-bases. A seguinte proposição explica porque.

Proposição 5.21. *Em um espaço topológico X com infinitos abertos, existe uma base com cardinalidade κ se, e somente se, existe uma sub-base com a mesma cardinalidade. Em particular, o espaço possui base enumerável se, e somente se possuir uma sub-base enumerável.*

Demonstração. Como toda base é uma sub-base, basta mostrar que dada uma sub-base \mathcal{S} , existe uma base \mathcal{B} com a mesma cardinalidade que \mathcal{S} . Primeiramente, é preciso notar que a cardinalidade de \mathcal{S} não pode ser finita. Caso contrário, não existiriam infinitos abertos na topologia.

Note que a família

$$\mathcal{B}_n = \{U_1 \cap \cdots \cap U_n \mid U_1, \dots, U_n \in \mathcal{S}\}$$

tem a mesma cardinalidade que \mathcal{S} (por quê?). Note também, que

$$\mathcal{B} = \{X\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n,$$

e portanto, \mathcal{B} também tem a mesma cardinalidade que \mathcal{S} (por quê?). □

Os espaços tais que todo ponto possui uma base enumerável de vizinhanças são semelhantes aos espaços métricos. Onde usaríamos seqüências de bolas de raio $\frac{1}{n}$, usamos a proposição abaixo. Um exemplo é a Proposição 5.23.

Proposição 5.22. *Seja X um espaço topológico e $x \in X$ um elemento qualquer. Se x possui uma base enumerável infinita de vizinhanças, \mathcal{B}_x , então x possui uma base de vizinhanças formada por conjuntos B_1, B_2, \dots satisfazendo*

$$B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \cdots$$

Dizemos que \mathcal{B}_x é uma base de vizinhanças encaixantes.

Demonstração. Seja B'_1, B'_2, \dots uma enumeração dos elementos de \mathcal{B}_x . Faça

$$B_n = \bigcap_{j=1}^n B'_j.$$

Por ser interseção finita de vizinhanças de x , cada B_n é uma vizinhança de x . E dada uma vizinhança qualquer de x , V , existe n tal que $B'_n \subset V$. Ou seja,

$$B_n \subset B'_n \subset V.$$

E portanto, os conjuntos B_n formam uma base de vizinhanças de x . □

É claro que se x possuir uma base finita de vizinhanças, então x possui uma base formada por apenas um elemento: a interseção de todos os elementos da base finita.

Em um espaço onde todo ponto possui base enumerável de vizinhanças, a topologia pode ser inteiramente descrita através de seqüências e seus limites.

Proposição 5.23. *Seja X um espaço topológico, $x \in X$, e $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{V}(x)$ uma base enumerável de vizinhanças de x . Então, a família $\mathcal{V}(x)$ pode ser inteiramente determinada se soubermos quais são as seqüências que convergem para x .*

Demonstração. Pela Proposição 5.22, podemos assumir que $\mathcal{B}_x = \{B_1, B_2, \dots\}$, com $B_n \supset B_{n+1}$.

Vamos mostrar que V é vizinhança de x se, e somente se, para toda seqüência convergente $x_n \rightarrow x$, tivermos um N tal que $n \geq N \Rightarrow x_n \in V$. Se V é vizinhança de x , então, é evidente que para toda seqüência $x_n \rightarrow x$ existe um tal N . Por outro lado, se V não é uma vizinhança de x , então, para cada n , existe B_n tal que $B_n \setminus V \neq \emptyset$. Tome $x_n \in B_n \setminus V$. A seqüência x_n converge para x (por quê?). No entanto, para a seqüência x_n , não existe o referido N . \square

Um exemplo de aplicação da enumerabilidade de uma base da topologia, é a demonstração da Proposição 9.28. Uma propriedade que está bastante relacionada é a separabilidade do espaço topológico.

Definição 5.24 (Espaço Separável). *Um espaço topológico X é separável quando houver um subconjunto enumerável denso. Ou seja, quando existir $S \subset X$ enumerável tal que $\bar{S} = X$.*

Uma das utilidades de se demonstrar que um espaço possui base enumerável, é poder concluir que este espaço é separável.

Proposição 5.25. *Um espaço topológico com base enumerável é separável.*

Demonstração. Seja B_1, B_2, \dots uma base enumerável. Agora, para cada B_n , escolha $x_n \in B_n$. Então, o conjunto $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ é denso. \square

Por outro lado, uma das utilidades de se demonstrar que um espaço é separável, é, em alguns casos, poder concluir que este espaço possui base enumerável. É o que faremos na demonstração da Proposição 9.28.

Proposição 5.26. *Um espaço métrico (X, d) tem base enumerável se, e somente se, é separável.*

Demonstração. Pela Proposição 5.25, basta mostrar que se X for separável, então X tem base enumerável. Seja $S \subset X$ um subconjunto enumerável denso. Basta, então, mostrar que

$$\mathcal{B} = \left\{ B_{\frac{1}{n}}(x) \mid x \in S, n = 1, 2, \dots \right\}$$

é uma base para a topologia de X .

Como \mathcal{B} é uma família de abertos, basta mostrar que para todo $a \in X$, dado $m \in \mathbb{N}^*$, existem $x \in S$ e $n \in \mathbb{N}^*$ tais que

$$a \in B_{\frac{1}{n}}(x) \subset B_{\frac{1}{m}}(a).$$

Pela densidade de X , podemos escolher $x \in S$ tal que $d(x, a) < \frac{1}{2m}$. Assim, basta tomar $n = 2m$, pois além de termos $a \in B_{\frac{1}{n}}(x)$, também temos que para todo $y \in B_{\frac{1}{n}}(x)$,

$$\begin{aligned} d(y, a) &\leq d(y, x) + d(x, a) \\ &< \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Ou seja, $B_{\frac{1}{n}}(x) \subset B_{\frac{1}{m}}(a)$. \square

Exercícios

5.4.1. Seja \mathcal{S} uma família de subconjuntos de X . Mostre que se \mathcal{S} é uma família finita, então a topologia gerada por \mathcal{S} também é finita.

5.4.2. Onde foi usado que $\#\mathcal{S} = \infty$ na Proposição 5.21?

5.4.3. Dê um exemplo de um espaço topológico onde existe uma base finita de vizinhanças de um certo elemento x , mas não existe uma base de vizinhanças composta por apenas um elemento.

5.4.4. Mostre que a seqüência x_n construída na demonstração da Proposição 5.23 de fato converge para x .

Fecho e Interior

Dado um subconjunto $B \subset X$ de um espaço topológico X , vamos associar a B o conjunto \overline{B} dado por todos os pontos que estão “próximos” de B . Veremos que a propriedade do item (3) da Proposição 4.8 garantirá que se $F = \overline{B}$, então $F = \overline{F}$. Ou seja, apesar de termos acrescentado pontos em B para construir o conjunto F , mesmo com esse alargamento, F não se tornou “próximo” de nenhum ponto do qual B já não fosse próximo. O conjunto \overline{B} é o *fecho* de B . E os conjuntos F que satisfazem $F = \overline{F}$ são chamados de *conjuntos fechados*. Veremos que os conjuntos fechados são exatamente os complementares dos conjuntos abertos.

6.1 Fecho e Fechado

Definição 6.1. *Seja (X, τ_X) um espaço topológico e $B \subset X$ um subconjunto qualquer de X . Definimos o fecho de B , e denotamos por \overline{B} o conjunto*

$$\overline{B} = \{x \in X \mid \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap B \neq \emptyset\}.$$

Também escrevemos $\text{cl}(B)$; ou quando queremos enfatizar a topologia τ_X , escrevemos $\text{cl}_{\tau_X}(B)$.

Observação 6.2. O operador de fecho é uma aplicação

$$\begin{aligned} \text{cl} : \mathcal{P}(X) &\rightarrow \mathcal{P}(X) . \\ B &\mapsto \overline{B} \end{aligned}$$

Lema 6.3. *Seja (X, τ_X) um espaço topológico. E para cada x , seja $\beta_x \subset \mathcal{V}(x)$ uma base de vizinhanças de x . Então,*

$$\overline{B} = \{x \in X \mid \forall V \in \beta_x, V \cap B = \emptyset\}.$$

Em particular, x está no fecho de B se, e somente se, para toda vizinhança aberta U de x , $U \cap B = \emptyset$.

Vamos então verificar algumas propriedades do operador cl_{τ_X} .

Proposição 6.4. *A operação de fecho no espaço topológico (X, τ_X) satisfaz:*

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset, \overline{X} = X$.
2. $B \subset \overline{B}$.
3. $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
4. $\overline{\overline{B}} = \overline{B}$. ($\text{cl}_{\tau_X}^2 = \text{cl}_{\tau_X}$)
5. Se B_λ ($\lambda \in \Lambda$) é uma família qualquer de subconjuntos de X , então

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \overline{B_\lambda} \subset \overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda}.$$

6. Se A, B são subconjuntos de X , então

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Demonstração. ■ Itens (1), (2) e (3).

Consequências imediatas da definição de fecho.

■ Item (4).

Por (2), $\overline{B} \subset \overline{\overline{B}}$. Seja então $x \in \overline{\overline{B}}$, e seja $U \in \tau_X$ uma vizinhança aberta de x . Então existe $y \in \overline{B}$, tal que $y \in U$. Ou seja, U é vizinhança de y . E portanto, como y está no fecho de B , existe $z \in B$ tal que $z \in U$. Provamos que toda vizinhança aberta de x intercepta B . Pelo lema 6.3, $x \in \overline{B}$.

■ Item (5).

O item (5) é imediato da definição de fecho. No entanto, também pode ser demonstrado através do item (3), pois para todo $\gamma \in \Lambda$,

$$B_\gamma \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \Rightarrow \overline{B_\gamma} \subset \overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda}.$$

Basta então fazer a união para todo $\gamma \in \Lambda$.

■ Item (6).

Por (5), basta mostrar que

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Suponha que $x \in \overline{A \cup B}$, mas $x \notin \overline{A}$. Vamos mostrar que $x \in \overline{B}$. Existe uma vizinhança V de x tal que $V \cap A = \emptyset$. Toda vizinhança de x intercepta $A \cup B$. Então, toda vizinhança de x contida em V , já que não intercepta A , tem que interceptar B . Observando que a família de todas as vizinhanças de x contidas em V forma uma base de vizinhanças de x (por quê?), concluímos pelo lema 6.3 que $x \in \overline{B}$. □

Observação 6.5. A demonstração do item (4) da Proposição 6.4 (de fato, o lema 6.3 utilizou, de maneira essencial, o fato de a família das vizinhanças abertas de um ponto formar uma base de vizinhanças. Veja a Observação 3.5, o texto introdutório da seção 3.5 e a Figura 4.2.

Definição 6.6. Dado um espaço topológico (X, τ_X) , um conjunto $F \subset X$ é fechado quando $\overline{F} = F$.

Pela definição de fechado, os conjuntos fechados são os pontos fixos da aplicação cl_{τ_X} . Por outro lado, o item (4) da Proposição (6.4) mostra que todo conjunto da forma \overline{B} é fechado. Ou seja, a família dos conjuntos fechados é exatamente a imagem de cl_{τ_X} . Se o “fecho” de um conjunto não fosse “fechado”, precisaríamos dar outro nome para ao menos um dos dois conceitos. :-)

Proposição 6.7. Em um espaço topológico (X, τ_X) , $F \subset X$ é fechado se, e somente se, $F^c \in \tau_X$.

Demonstração. Tome $x \in F^c$. Então existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tal que $V \cap F = \emptyset$. Ou seja, $V \subset F^c$. Portanto, F^c é aberto, já que é vizinhança de todos os seus pontos.

Por outro lado, suponha que $F^c \in \tau_X$. Então, nenhum ponto de F^c pertence a \overline{F} (por quê?). Ou seja,

$$\overline{F} \subset F.$$

Portanto, $\overline{F} = F$ (por quê?). □

Observação 6.8. A Proposição 6.7 mostra que a topologia de X pode ser determinada pela família

$$\mathcal{F} = \{F \subset X \mid \overline{F} = F\},$$

dos subconjuntos fechados de X . Quando é então que uma família $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ define os conjuntos fechados de uma topologia τ_X ? Ou seja, quando é que a família

$$\tau_{\mathcal{F}} = \{A \subset X \mid A^c \in \mathcal{F}\}$$

é uma topologia de X ? A resposta é simples: a família \mathcal{F} terá que satisfazer as condições listadas na Proposição 6.9.

Indo um pouco além, se conhecermos cl_{τ_X} , também sabemos quem são os fechados de τ_X , e por consequência, sabemos quem é a topologia τ_X . Desta forma, quando é então que uma aplicação

$$c : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$$

é igual à operação de fecho cl_{τ_X} de uma topologia τ_X ? A resposta a esta pergunta está contida na Proposição 6.4. Veja o Exercício ??.

Proposição 6.9. *Dado um espaço topológico (X, τ_X) , a família \mathcal{F} formada pelos subconjuntos fechados de X satisfaz:*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{F}$.
2. $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$.
3. $F_\lambda \in \mathcal{F} (\lambda \in \Lambda) \Rightarrow \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}$.

Demonstração. Basta utilizar as leis de De Morgan

$$\begin{aligned} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c &= \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)^c \\ \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c &= \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)^c \end{aligned}$$

para verificar a equivalência entre os itens da proposição e os itens da definição de topologia 4.1. \square

O fecho de um conjunto B pode ser facilmente determinado se utilizarmos a família \mathcal{F} dos fechados.

Proposição 6.10. *Seja X um espaço topológico e \mathcal{F} a família formada pelos subconjuntos fechados de X . Então, para um subconjunto qualquer $B \subset X$,*

$$\overline{B} = \bigcap_{\substack{B \subset F \\ F \text{ é fechado}}} F.$$

Em outras palavras, \overline{B} é o menor conjunto fechado que contém B .

Demonstração. Como \overline{B} é fechado e $B \subset \overline{B}$, temos que

$$\bigcap_{B \subset F \in \mathcal{F}} F \subset \overline{B}.$$

Afirmção. *Se F é fechado, então*

$$B \subset F \Rightarrow \overline{B} \subset F.$$

De fato,

$$B \subset F \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{F} = F.$$

Pela afirmação anterior, é evidente que

$$\overline{B} \subset \bigcap_{B \subset F \in \mathcal{F}} F.$$

\square

6.2 Interior

Assim como para o fecho, dado um espaço topológico (X, τ_X) , podemos associar a cada $B \subset X$ o subconjunto de B formado por todos os pontos dos quais B é vizinhança. Do mesmo modo que o fecho de um conjunto é fechado, o interior será aberto. E assim como o fecho de B é o menor fechado que contém B , seu interior é o menor aberto contido em B .

Proposição 6.11. *Seja (X, τ_X) um espaço topológico e $B \subset X$ um subconjunto qualquer de X . Então existe um conjunto $A \subset B$ que é o maior subconjunto de B que é aberto. O conjunto A também pode ser escrito*

$$A = \{x \in B \mid B \in \mathcal{V}(x)\}.$$

Demonstração. Como a união arbitrária de abertos é um aberto, então

$$A' = \bigcup_{\substack{U \in \tau_X \\ U \subset B}} U$$

é evidentemente o maior aberto contido em B . Vamos mostrar que $A = A'$.

O conjunto A' é tal que se $x \in A'$, então $A' \in \mathcal{V}(x)$. Como $A' \subset B$, então para todo ponto de $x \in A'$, temos que B é uma vizinhança de x . Ou seja,

$$A' \subset A.$$

Falta então mostrar que o conjunto A é aberto e que portanto,

$$A \subset A'.$$

Seja $x \in A$. Como B é vizinhança de x , então existe uma vizinhança aberta de x , U_x , tal que $x \in U_x \subset B$. O conjunto U_x é vizinhança de todos os seus pontos. Em particular, B é vizinhança de todos os pontos de U_x . Ou seja,

$$U_x \subset A.$$

E portanto,

$$A = \bigcup_{x \in A} U_x$$

é aberto. □

É importante notar quando se afirma a “existência” de um elemento “máximo”. Ao contrário do que nossa intuição possa acreditar, nem sempre existe um elemento “máximo” ou “maximal” que satisfaça determinada condição. Por exemplo, não existe o “maior número real que é menor que 1.” Talvez o leitor não tenha percebido, mas se o conjunto \emptyset não fosse aberto, a demonstração anterior não estaria correta. Em que momento utilizamos que \emptyset é um conjunto aberto?

Definição 6.12. *Seja (X, τ_X) um espaço topológico e $B \subset X$ um subconjunto qualquer de X . O interior de B é maior conjunto aberto contido em B . Denotamos o interior de B por $\overset{\circ}{B}$, $\text{int}(B)$, ou ainda $\text{int}_{\tau_X}(B)$ quando queremos enfatizar que é o interior de B com respeito à topologia τ_X .*

Proposição 6.13. *Seja X um espaço topológico. Valem as seguintes relações entre o fecho e o interior de um conjunto $B \subset X$:*

$$\begin{aligned} \text{cl}(B^c) &= \text{int}(B)^c \\ \text{cl}(B)^c &= \text{int}(B^c). \end{aligned}$$

Demonstração. Exercício. :-)

□

6.3 Continuidade

Os conjuntos fechados são simplesmente complementos de conjuntos abertos. Dada uma aplicação $f : X \rightarrow Y$, a inversa f^{-1} preserva a operação de complemento. Assim, f será contínua quando a imagem inversa de cada fechado for um conjunto fechado.

Proposição 6.14. *Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação qualquer. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. A aplicação f é contínua: para todo aberto $A \subset Y$, $f^{-1}(A)$ é um aberto de X .

2. Para todo fechado $F \subset Y$, $f^{-1}(F)$ é um fechado de X .

3. Para todo conjunto $B \subset X$,

$$f(\overline{B}) \subset \overline{f(B)}.$$

4. Para todo conjunto $B \subset X$,

$$\text{int}(f(B)) \subset f(\text{int}(B)).$$

Demonstração. ■ (1) \Leftrightarrow (2)

Basta notar que $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ preserva a operação de complemento. Isto é,

$$f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c.$$

■ (2) \Rightarrow (3)

Por hipótese, o conjunto $f^{-1}(\overline{f(B)})$ é fechado e contém B . Portanto, como o fecho de B é o menor fechado que o contém, segue que

$$\overline{B} \subset f^{-1}(\overline{f(B)})$$

Basta agora aplicar f a ambos os lados para obter

$$f(\overline{B}) \subset \overline{f(B)}.$$

■ (3) \Leftrightarrow (4)

Segue da relação entre o fecho e o interior descrito na Proposição 6.13.

■ (3) \Rightarrow (2)

Seja $F \subset Y$ um conjunto fechado. Faça

$$B = f^{-1}(F).$$

Vamos mostrar que B é fechado. Pela hipótese do item (3), vale que

$$f(\overline{B}) \subset \overline{f(B)} \subset \overline{F} = F.$$

Aplicando f^{-1} de ambos os lados,

$$\overline{B} \subset f^{-1}(F) = B.$$

Portanto, $\overline{B} = B$. □

Aplicação Fechada

Assim como fizemos quando definimos o que vem a ser uma aplicação aberta (Definição 4.19), vamos definir o que é uma aplicação fechada.

Definição 6.15. *Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ entre dois espaços topológicos é fechada, quando para todo fechado $F \subset X$, sua imagem $f(F) \subset Y$ também for fechada.*

Note que enquanto é verdade que se f^{-1} leva abertos em abertos (ou seja, f é contínua), então f^{-1} leva fechados em fechados; não é verdade que se f é uma aplicação aberta, também será uma aplicação fechada. Por exemplo,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 0 \end{aligned}$$

é uma aplicação fechada, mas não é aberta.

6.4 Convergência

Em um espaço topológico X , se $F \subset X$ é fechado, e $x \notin F$, então nenhuma sequência $x_n \in F$ pode convergir para x . De fato, F^c é uma vizinhança de x que não contém nenhum ponto da sequência x_n . Portanto, se uma sequência $x_n \in F$ converge para x , teremos que $x \in F$. Em particular, esquecendo um pouco o conjunto F , se $x_n \rightarrow x$, então,

$$x \in \overline{\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}}.$$

Indo um pouco além,

$$x \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n \mid n \geq N\}}.$$

Pois a sequência x_{N+n} também converge para x .

Por outro lado, dada a sequência $x_n \in X$, suponha que

$$x \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n \mid n \geq N\}}.$$

Podemos concluir que $x_n \rightarrow x$? A resposta é não! Mas por que não? Por exemplo, por que $x_n = (-1)^n$ não converge? E se

$$\{x\} = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n \mid n \geq N\}},$$

então vale que $x_n \rightarrow x$? Considere

$$x_n = \begin{cases} 0, & n \text{ é ímpar} \\ n, & n \text{ é par} \end{cases}$$

para verificar que não vale. Mas é verdade que se $x_n \rightarrow x$, então

$$\{x\} = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n \mid n \geq N\}}?$$

Para ver que não, basta considerar a topologia $\{\emptyset, X\}$, onde X é um conjunto qualquer com mais de um elemento. Neste caso,

$$X = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n \mid n \geq N\}},$$

pois o fecho de qualquer conjunto não vazio é igual a X .

Vamos supor, então, que

$$x \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n \mid n \geq N\}}.$$

Neste caso, quando é que $x_n \not\rightarrow x$? Se

$$x_n \not\rightarrow x,$$

então existe uma vizinhança de x , V , tal que infinitos $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots$ não pertencem a V . Ou seja,

$$x \notin \overline{\{x_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}}.$$

É como dizer que $x_n \rightarrow x$ quando para toda “subsequência” x_{n_k} tivermos que $x_{n_k} \rightarrow x$.

Definição 6.16. Dado um conjunto X e uma sequência $x_n \in X$. Uma sub-sequência de x_n é simplesmente uma sequência $y_k = x_{n_k}$, onde $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$.

Observação 6.17. Dada uma sequência $x_n \in X$, o que determina as subsequências de x_n , são as aplicações

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \\ k \mapsto n_k$$

que preservam a ordem \leq de \mathbb{N} . Ou seja,

$$k_1 \leq k_2 \Leftrightarrow n_{k_1} \leq n_{k_2}.$$

Poderíamos ter definido *subsequência* como uma aplicação $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que satisfaz

$$k_1 < k_2 \Rightarrow f(k_1) < f(k_2).$$

Proposição 6.18. Dado um espaço topológico X , uma sequência $x_n \in X$ converge para $x \in X$ se, e somente se, para toda subsequência x_{n_k} ,

$$x \in \overline{\{x_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}}.$$

Demonstração. Se $x_n \rightarrow x$, então toda subsequência x_{n_k} converge para x (por quê?). Portanto,

$$x \in \overline{\{x_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}}.$$

Pois se $x \notin \overline{\{x_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}}$, então $\overline{\{x_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}}^c$ é uma vizinhança de x que não contém nenhum x_{n_k} .

Por outro lado, se $x_n \not\rightarrow x$, então existe uma vizinhança V de x , tal que para infinitos índices $n_1, n_2, n_3, \dots, x_{n_k} \notin V$. Portanto, para esses índices,

$$x \notin \overline{\{x_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}}.$$

□

Uma das implicações da Proposição 6.18, é que basta conhecer o fecho dos conjuntos enumeráveis para sabermos quais são e quais não são as sequências convergentes. Em espaços métricos, por exemplo, os conjuntos fechados F , são exatamente aqueles que

$$x_n \in F, x_n \rightarrow x \Rightarrow x \in F.$$

Em espaços topológicos em geral, isso não é necessariamente válido. Mais adiante, veremos como o conceito de *redes* pode remediar esta deficiência das sequências. Por exemplo, considere a topologia em \mathbb{R} do exercício ??, onde os fechados são, além do próprio \mathbb{R} , os conjuntos enumeráveis (com cardinalidade menor ou igual à de \mathbb{N}). Neste caso, as sequências convergentes são constantes a menos de um número finito de índices:

$$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n = x. \quad (6.1)$$

De fato, se houvessem infinitos índices n_k tais que $x_{n_k} \neq x$, então, $\{x_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ seria um fechado que não contém x , contradizendo a Proposição 6.18. Por outro lado, as sequências de (6.1), são exatamente as sequências convergentes na topologia discreta.

Essa mesma construção poderia ser feita com qualquer conjunto X no lugar de \mathbb{R} , para se ter uma topologia em X onde as sequências convergentes são as mesmas da topologia discreta. Precisamos que X seja não enumerável para que a topologia construída seja diferente de topologia discreta $\mathcal{P}(X)$.

Em espaços métricos, uma aplicação $f: X \rightarrow Y$ era contínua quando

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x). \quad (6.2)$$

Para o caso de espaços topológicos, a continuidade de f implica na condição da equação (6.2). No entanto, a volta nem sempre vale.

Proposição 6.19. Seja $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação entre espaços topológicos, contínua no ponto $x \in X$. Então,

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x).$$

Demonstração. Se $f(x_n) \not\rightarrow f(x)$, então existe uma vizinhança aberta A de $f(x)$, tal que para um número infinito de índices, a sequência $f(x_n)$ não pertence a A . Portanto, para um número infinito de índices, a sequência x_n não pertence a $f^{-1}(A)$, que é, pela continuidade de f em x , uma vizinhança de x . O que mostra que $x_n \not\rightarrow x$. □

Topologias Derivadas de Outras Topologias

7.1 Topologia de um Sub-Espaço

Se temos um espaço topológico (X, τ_X) e um subconjunto $Z \subset X$, então parece natural pensarmos na restrição da topologia τ_X ao subconjunto Z . Mas isso é realmente natural? Vamos fazer algumas considerações.

Imagine que $x_n \in Z$ é uma sequência (o ideal seria falar de “redes” — veja o Capítulo ??) que na topologia τ_X converge para $x \in Z$. Neste caso, se fôssemos “induzir” em Z uma topologia τ_Z a partir de τ_X , sua topologia deveria ser tal que para $x_n, x \in Z$,

$$x_n \xrightarrow{\tau_X} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\tau_Z} x.$$

Pensando em termos da operação de fecho, para um conjunto $B \subset Z$, o conjunto dos pontos de Z que estão “próximos” — ou seja, no fecho — de B são, intuitivamente, os pontos de Z que estão em $\text{cl}_{\tau_X}(B)$. Ou seja, deveríamos ter que

$$\text{cl}_{\tau_Z}(B) = Z \cap \text{cl}_{\tau_X}(B).$$

Vendo do ponto de vista da continuidade, se $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ é uma aplicação qualquer, e $W \subset Y$ é tal que $f(X) \subset W$, então podemos pensar na aplicação

$$\begin{aligned} \bar{f} : X &\rightarrow W, \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

e esperar que possamos induzir em W uma topologia tal que f é contínua se, e somente se, \bar{f} o for. Poderíamos também, dado $Z \subset X$, pensar na continuidade de $f|_Z$. Claro que esperaríamos que se f é contínua em $z \in Z$, então, na topologia induzida, $f|_Z$ deve ser contínua em z . Ou seja, se V é vizinhança de z em τ_X , $Z \cap V$ deve ser vizinhança de z em τ_Z . Dentre essas considerações, o menos natural é pensar em termos de abertos. E é por isso que este livro é “de vários ângulos”. :-)

Entretanto, como nossa definição de espaço topológico é em termos de abertos, com as ferramentas que temos até o momento, será mais fácil definir a topologia de um subconjunto em termos de abertos. Felizmente, a definição com abertos é extremamente simples.

Definição 7.1 (Topologia Induzida em um Subconjunto). *Seja (X, τ_X) um espaço topológico e $Z \subset X$ um subconjunto de X qualquer. Então, o conjunto*

$$Z \cap \tau_X = \{Z \cap A \mid A \in \tau_X\}$$

é a topologia induzida por τ_X em Z .

Notação. *Na Definição 7.1, a notação $Z \cap \tau_X$ não é a interseção de τ_X e Z , mas a família formada pela interseção dos elementos de τ_X com o conjunto Z . Este abuso de notação, em geral, não deve causar problemas de entendimento e será usado sem ressalvas.*

Vamos então verificar que a definição de topologia induzida em um subconjunto satisfaz as propriedades discutidas no início do capítulo.

Proposição 7.2. *Seja (X, τ_X) um espaço topológico e $Z \subset X$ um subconjunto qualquer de X . Então a topologia induzida em Z , $\tau_Z = Z \cap \tau_X$, satisfaz:*

1. Todo aberto $A \in \tau_Z$ da topologia induzida é da forma $A = Z \cap A'$ para algum aberto $A' \in \tau_X$ da topologia de X .

2. Todo fechado $F \in \tau_Z$ da topologia induzida é da forma $F = Z \cap F'$ para algum fechado $F' \in \tau_X$ da topologia de X .

3. Se $x \in Z$, então

$$\mathcal{V}_{\tau_Z}(x) = Z \cap \mathcal{V}_{\tau_X}(x).$$

4. Se $B \subset Z$, então

$$\text{cl}_{\tau_Z}(B) = Z \cap \text{cl}_{\tau_X}(B).$$

5. Para $x_n, x \in Z$, então

$$x_n \xrightarrow{\tau_X} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\tau_Z} x.$$

6. Se (Y, τ_Y) é um espaço topológico qualquer e $f : (Y, \tau_Y) \rightarrow (X, \tau_X)$ é uma aplicação tal que $f(Y) \subset Z$, então

$$\begin{aligned} \bar{f} : (Y, \tau_Y) &\rightarrow (Z, \tau_Z) \\ y &\mapsto f(y) \end{aligned}$$

é contínua se, e somente se, f é contínua. (Note que a diferença entre as aplicações f e \bar{f} é apenas o contra-domínio das aplicações)

7. Se (Y, τ_Y) é um espaço topológico qualquer e $g : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ é uma aplicação contínua, então

$$\begin{aligned} g|_Z : (Z, \tau_Z) &\rightarrow (Y, \tau_Y) \\ z &\mapsto g(z) \end{aligned}$$

é contínua.

Demonstração. ■ Itens (1) e (2).

Imediato da definição de τ_Z .

■ Item (3).

Imediato do item (1).

■ Item (4).

Este fato pode ser demonstrado de várias formas — de vários ângulos ;-). Vamos utilizar a Proposição 6.10, mas o leitor é motivado a demonstrar diretamente da definição de fecho (Definição 6.1).

Pela Proposição 6.10 e pelo item (2),

$$\begin{aligned} \text{cl}_{\tau_Z}(B) &= \bigcap_{\substack{F: \text{fechado de } \tau_Z \\ B \subset F}} F \\ &= \bigcap_{\substack{F: \text{fechado de } \tau_X \\ B \subset Z \cap F}} (Z \cap F) \\ &= Z \cap \left(\bigcap_{\substack{F: \text{fechado de } X \\ B \subset F}} F \right) \\ &= Z \cap \text{cl}_{\tau_X}(B). \end{aligned}$$

(em que lugar da equação foi utilizado que $B \subset Z$?)

■ Item (5).

Exercício.

■ Item (6)

Basta notar que $f^{-1}(Z \cap A) = f^{-1}(A)$.

■ Item (7)

Exercício. □

Observação 7.3. Para uma aplicação $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ e um subconjunto $Z \subset X$, sempre que falarmos de propriedades topológicas de $f|_Z$ estaremos nos referindo à topologia $Z \cap \tau_X$. De modo mais geral, a menos que se diga o contrário, consideraremos $Z \subset X$ dotado da topologia $Z \cap \tau_X$.

Observação 7.4. Note que se Z é um aberto, então

$$Z \cap \tau_X = \{A \in \tau_X \mid A \subset Z\}.$$

Em particular, os abertos da topologia induzida são também abertos na topologia original. Isso não vale em geral.

Da mesma forma, se Z for fechado, os fechados da topologia induzida serão exatamente os fechados da topologia original que estejam contidos em Z . (demonstre!)

Exemplo 7.5 (Topologia Induzida: $[0, 1) \subset \mathbb{R}$). Considere a topologia no intervalo $[0, 1)$ induzida pela topologia usual dos números reais. Então, por exemplo, a família

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ \left[0, \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

é uma base de vizinhanças abertas para o ponto 0.

Exemplo 7.6 (Espaço Métrico). Em um espaço métrico (X, d) , temos a topologia τ_d , em X , induzida pela métrica d . Se $Z \subset X$ é um subconjunto qualquer de X , então, a princípio, temos duas maneiras canônicas de induzir uma topologia em Z . Temos $Z \cap \tau_d$, e temos também a topologia τ_{d_Z} induzida pela restrição da métrica d ao conjunto Z :

$$\begin{aligned} d_Z : \quad Z \times Z &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (z_1, z_2) &\mapsto d(z_1, z_2) \end{aligned} .$$

Essas duas topologias coincidem. (por quê? dica: o que são as bolas na métrica induzida?)

União Disjunta

Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos disjuntos. O leitor não deverá ter problemas para se convencer que é natural definir a topologia

$$\tau_{X \cup Y} = \{U \cup V \mid U \in \tau_X, V \in \tau_Y\}$$

em $X \cup Y$. Note que $\tau_{X \cup Y} = \tau(\tau_X \cup \tau_Y)$. Essa topologia é caracterizada pela propriedade

$$\tau_X = X \cap \tau_{X \cup Y} \quad \text{e} \quad \tau_Y = Y \cap \tau_{X \cup Y}.$$

No Capítulo 8, estudaremos a existência de conjuntos que são fechados e abertos ao mesmo tempo. Se em um espaço topológico (W, τ_W) existe um subconjunto próprio não vazio, $X \subset W$, que é aberto e fechado ao mesmo tempo, então seu complemento, $Y = X^c$ também é aberto e fechado. Neste caso, os abertos de W são da forma $U \cup V$, onde $U \in \tau_X$ e $V \in \tau_Y$. Dizemos que (W, τ_W) é desconexo (Definição 8.1).

Exercícios

7.1.1. Mostre que a família

$$\tau_Z = Z \cap \tau_X$$

da Definição 7.1 é de fato uma topologia.

7.1.2. Dê um exemplo de um espaço topológico (X, τ_X) , um subconjunto $Z \subset X$ e uma função $g : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ tais que g não é contínua, mas $g|_Z$ é.

7.2 Topologias Inicial e Final

A *topologia inicial* é um dos conceitos mais importantes em topologia geral. Esta seção deve ser estudada com muita atenção.

Se temos uma aplicação $f : X \rightarrow (Y, \tau_Y)$ de um conjunto X qualquer em um espaço topológico, a Proposição 5.10 mostra que $f^{-1}(\tau_Y)$ é uma topologia em X . Não apenas isso, mas é também a *menor* topologia que torna f contínua. De fato, $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ é contínua quando $f^{-1}(\tau_Y) \subset \tau_X$. Mesmo quando estivermos tratando de uma família de aplicações

$$f_\lambda : X \rightarrow (Y_\lambda, \tau_\lambda),$$

podemos falar da topologia mais fraca em X que torna *todas* as f_λ contínuas.

Definição 7.7. *Dada uma família de aplicações*

$$f_\lambda : X \rightarrow (Y_\lambda, \tau_\lambda), \quad (\lambda \in \Lambda),$$

a topologia $\tau(f^{-1}(\tau_\lambda), \lambda \in \Lambda)$ — a menor topologia tal que todas as aplicações f_λ são contínuas — é chamada de topologia (inicial) induzida pela família f_λ . Quando a família é composta por apenas uma aplicação f , a topologia inicial é denotada por τ_f .

Da mesma forma, dada uma aplicação $f : (X, \tau_X) \rightarrow Y$ de um espaço topológico em um conjunto Y qualquer, podemos nos perguntar qual seria a maior topologia que pode ser colocada em Y de modo que f seja contínua. O leitor deve se convencer de que a exigência “maior topologia tal que f seja contínua” faz sentido. Afinal, se $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ é contínua, então f será contínua se a topologia de τ_Y for substituída por uma topologia mais fraca qualquer.

Definição 7.8. *Dada uma família de aplicações*

$$f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \rightarrow Y \quad (\lambda \in \Lambda),$$

a maior topologia em Y tal que todas as aplicações f_λ são contínuas é chamada de topologia final induzida pela família f_λ . Quando a família é composta por uma única aplicação f , denotamos a topologia final por τ^f .

Daqui por diante, vamos omitir o conjunto de índices Λ quando conveniente, para simplificar a notação.

Observação 7.9. O caso em que o uso da topologia final é mais útil, é quando se tem apenas uma função f . Para uma família f_λ , se denotarmos por τ^{f_λ} a topologia final induzida pela aplicação f_λ , então a topologia final induzida pela família toda será

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \tau^{f_\lambda}.$$

Isso porque a inteseção de topologias é uma topologia.

Proposição 7.10. *Dada a aplicação $f : (X, \tau_X) \rightarrow Y$, a topologia final induzida por f é a família*

$$\{A \subset Y \mid f^{-1}(A) \in \tau_X\}.$$

Demonstração. Denote por \mathcal{F} a família $\{A \subset Y \mid f^{-1}(A) \in \tau_X\}$. Evidentemente que $\tau^f \subset \mathcal{F}$, pois \mathcal{F} é a maior família tal que $f^{-1}(\mathcal{F}) \subset \tau_X$. Basta então mostrar que \mathcal{F} é de fato uma topologia... deixemos isso como exercício ao leitor. :-)

Exemplo 7.11 ($f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$). A aplicação

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ x &\mapsto \exp(2\pi xi) \end{aligned}$$

é contínua quando consideramos as topologias usuais, $\tau_{\mathbb{R}}$ de \mathbb{R} e $\tau_{\mathbb{S}^1}$ de \mathbb{S}^1 . A topologia inicial em \mathbb{R} quando consideramos a topologia usual em \mathbb{S}^1 é dada por

$$\tau_f = \{A \in \tau_{\mathbb{R}} \mid A = A + \mathbb{Z}\}.$$

Ou, o que dá na mesma,

$$\tau_f = \{A + \mathbb{Z} \mid A \in \mathbb{R}\}.$$

E qual é a topologia final de $f : (\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}}) \rightarrow \mathbb{S}^1$?

Diagramas Comutativos

Quando temos uma família de aplicações cada uma com seu domínio e seu contra-domínio, podemos representá-las em um diagrama. Por exemplo,

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{h} & Z \\ \pi \downarrow & & \uparrow g & \nearrow \tilde{h} & \\ \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y} & & \end{array}$$

Dizemos que o diagrama *comuta* quando “diferentes caminhos” correspondem à mesma aplicação. Se, por exemplo, o diagrama anterior comuta, então sabemos que $g \circ \tilde{f} \circ \pi = f$; ou então, $\tilde{h} \circ \tilde{f} \circ \pi = h \circ f$.

Vamos caracterizar as topologias inicial e final utilizando diagramas comutativos.

Proposição 7.12. *Dada a aplicação $f : X \rightarrow (Y, \tau_Y)$, a topologia inicial τ_f é a única topologia τ_X que torna f contínua e é tal que para todo diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccc} (Z, \tau_Z) & \xrightarrow{g} & (X, \tau_X) \\ & \searrow \tilde{g} & \downarrow f \\ & & (Y, \tau_Y) \end{array}$$

a continuidade de g é equivalente à continuidade de \tilde{g} .

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que para $\tau_X = \tau_f$, a continuidade de g é equivalente à de \tilde{g} . Primeiramente, por definição, τ_f torna f contínua. Se g for contínua, então \tilde{g} é contínua por ser a composição de duas aplicações contínuas. Por outro lado, supondo que \tilde{g} é contínua, dado $A \in \tau_f$, A é da forma $f^{-1}(U)$, com $U \in \tau_Y$. Assim,

$$g^{-1}(A) = g^{-1}(f^{-1}(U)) = \tilde{g}^{-1}(U).$$

Pela continuidade de \tilde{g} , este conjunto é aberto de Z . Ou seja, a imagem inversa de um aberto de X é aberto de Z . Portanto, g é contínua.

Falta mostrar que só existe uma topologia que satisfaz a condição da proposição. Suponha que τ_X e τ_X' ambas satisfaçam a condição do enunciado. Considere a seguinte o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccc} (X, \tau_X') & \xrightarrow{\text{id}} & (X, \tau_X) \\ & \searrow f & \downarrow f \\ & & (Y, \tau_Y) \end{array}$$

Neste caso, como τ_X satisfaz as condições do enunciado e f é contínua na topologia τ_X' , temos que $\text{id} : (X, \tau_X') \rightarrow (X, \tau_X)$ é contínua. Mas a continuidade da identidade é equivalente a

$$\tau_X \subset \tau_X'.$$

Invertendo os papéis de τ_X e τ_X' , obtemos a unicidade:

$$\tau_X' = \tau_X.$$

□

Observação 7.13. Muitos autores começariam a demonstração anterior pela unicidade. Na demonstração da unicidade, não foi preciso utilizar a existência! Não foi preciso saber como é a “cara” da topologia τ_f . Optamos por considerar duas topologias quaisquer que satisfazem as condições impostas e demonstrar que são necessariamente iguais. Concluindo que *se existe uma*, então é única. Daqui por diante, quando possível, começaremos esse tipo de demonstração pela unicidade.

A Proposição 7.12 admite a seguinte generalização.

Proposição 7.14. *Considere a família de aplicações $f_\lambda : X \rightarrow (Y_\lambda, \tau_{Y_\lambda})$. A topologia inicial em X dada pela família f_λ é a única topologia τ_X onde todas as f_λ são contínuas, e para toda aplicação*

$$g : (Z, \tau_Z) \rightarrow (X, \tau_X)$$

vale que

$$g \text{ é contínua} \Leftrightarrow \forall \lambda \in \Lambda, f_\lambda \circ g \text{ é contínua.}$$

Demonstração. ■ Unicidade.

Seja τ_X uma topologia que satisfaz as condições do enunciado, e $\tau_{X'}$ uma topologia onde as f_λ são contínuas. Considere a seguinte família de diagramas comutativos indexada por $\lambda \in \Lambda$.

$$\begin{array}{ccc} (X, \tau_{X'}) & \xrightarrow{\text{id}} & (X, \tau_X) \\ & \searrow f_\lambda & \downarrow f_\lambda \\ & & (Y, \tau_Y) \end{array}$$

Como τ_X satisfaz as condições da proposição e f_λ é contínua na topologia $\tau_{X'}$, então $\text{id} : (X, \tau_{X'}) \rightarrow (X, \tau_X)$ é contínua. Ou seja,

$$\tau_X \subset \tau_{X'}.$$

Portanto, para uma topologia $\tau_{X'}$ que também satisfaz as condições da proposição, se invertermos os papéis de τ_X e $\tau_{X'}$, chegaremos à igualdade.

■ A topologia inicial possui as propriedades enunciadas.

Suponha que τ_X seja a topologia inicial. Ou seja, a topologia gerada pela família

$$\mathcal{F} = \{f_\lambda^{-1}(U) \mid \lambda \in \Lambda, U \in \tau_{Y_\lambda}\}.$$

Pela Proposição 5.11,

$$\begin{aligned} g \text{ é contínua} &\Leftrightarrow g^{-1}(\mathcal{F}) \subset \tau_Z \\ &\Leftrightarrow \forall \lambda \in \Lambda, g^{-1}(f_\lambda^{-1}(\tau_{Y_\lambda})) \subset \tau_Z \\ &\Leftrightarrow \forall \lambda \in \Lambda, f_\lambda \circ g \text{ é contínua.} \end{aligned}$$

□

A topologia final tem forma semelhante à inicial quando utilizamos diagramas comutativos.

Proposição 7.15. *Dada a aplicação $f : (X, \tau_X) \rightarrow Y$, a topologia final τ^f é a única topologia, τ_Y que torna f contínua e é tal que para todo diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccc} (X, \tau_X) & & \\ f \downarrow & \searrow \tilde{g} & \\ (Y, \tau_Y) & \xrightarrow{g} & (Z, \tau_Z) \end{array},$$

a continuidade de g é equivalente à continuidade de \tilde{g} .

Demonstração. Para mostrar a unicidade, considere as topologias τ_Y e $\tau_{Y'}$, e suponha que ambas possuem as propriedades do enunciado. Então, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} (X, \tau_X) & & \\ f \downarrow & \searrow f & \\ (Y, \tau_Y) & \xrightarrow{\text{id}} & (Z, \tau_Z) \end{array}$$

comuta, e o fato de f ser contínua em ambas as topologias implica que id é um homeomorfismo. Ou seja,

$$\tau_Y = \tau_{Y'}.$$

Vamos então mostrar que $\tau_Y = \tau^f$ satisfaz as condições da proposição. A parte não trivial é mostrar que a continuidade de \tilde{g} implica na continuidade de g . Seja $A \in \tau_Z$, então

$$\tilde{g}^{-1}(A) = (g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$$

é aberto de X . Pela definição de topologia final, temos que $g^{-1}(A)$ é aberto de τ^f . Ou seja, g é contínua. \square

Exemplos

Exemplo 7.16. Seja $(V, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Faça

$$f: V \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x\|$$

Vamos denotar por $\tau_{\|\cdot\|}$ a topologia da norma e por τ_f a topologia inicial induzida em V por f .

A aplicação f é contínua em $\tau_{\|\cdot\|}$. Portanto,

$$\tau_f \subset \tau_{\|\cdot\|}.$$

No entanto, se $U \in \tau_f$ e $x \in U$, então $y \in U$ para todo $y \in V$ tal que $\|y\| = \|x\|$. Portanto,

$$\tau_f \subsetneq \tau_{\|\cdot\|}.$$

Por outro lado, as vizinhanças de 0 são as mesmas em ambas as topologias.

Fica demonstrado que denotar a topologia da norma por $\tau_{\|\cdot\|}$ foi uma escolha ruim, pois a topologia da norma NÃO é a topologia inicial induzida pela norma. :-p

Exemplo 7.17. Seja (X, d) um espaço métrico. Considere a família de funções

$$f_x: X \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto d(x, y)$$

indexada por $x \in X$. Neste caso, a topologia da métrica d é exatamente a topologia inicial induzida pela família f_x .

Exemplo 7.18. Seja $C_b(\mathbb{R})$ o conjunto das funções limitadas de \mathbb{R} em \mathbb{R} . Para cada $x \in \mathbb{R}$, temos

$$F_x: C_b(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto f(x)$$

A topologia inicial definida em $C_b(\mathbb{R})$ pela família F_x ($x \in \mathbb{R}$) é a topologia da convergência ponto a ponto, onde

$$f_n \rightarrow f \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) \rightarrow f(x).$$

Veja a Seção 7.3.

Ainda podemos, para cada sequência $x_n \in \mathbb{R}$ com $x_n \rightarrow \infty$ (ou $-\infty$), definir

$$F_{(x_n)}: C_b(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \limsup |f(x_n)|$$

etc. Podemos sempre obter topologias mais e mais fortes. No entanto, todas elas são mais fracas que a topologia da norma do supremo, pois todas essas funções são contínuas quando $C_b(\mathbb{R})$ é munido da norma

$$\|f\|_\infty = \sup |f(\mathbb{R})|.$$

Se também considerarmos as sequências $x_n \rightarrow -\infty$, temos uma topologia mais forte ainda. Podemos ainda fazer o mesmo para o \liminf e obtermos topologias cada vez mais fortes. No entanto, todas essas topologias continuam sendo mais fracas que a topologia da norma do supremo, pois todas essas funções são contínuas quando consideramos a norma do supremo em $C_b(\mathbb{R})$.

Exercícios

7.2.1. Por que a topologia inicial é definida como a mais fraca tal que a família de funções f_λ é contínua, e não como a mais forte?

7.2.2. Por que a topologia final é definida como a mais forte tal que a família de funções f_λ é contínua, e não como a mais fraca?

7.2.3. Seja $f_\lambda : X \rightarrow (Y_\lambda, \tau_\lambda)$ uma família de aplicações. Mostre que

$$\tau = \tau(\tau_{f_\lambda}, \lambda \in \Lambda)$$

é, de fato, a menor topologia tal que todas as f_λ são contínuas.

7.2.4. Seja $f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \rightarrow Y$ uma família de aplicações. Mostre que

$$\tau = \bigcap \tau^{f_\lambda}$$

é a topologia mais forte tal que todas as f_λ são contínuas.

7.2.5. Complete a demonstração da Proposição 7.10.

7.2.6. Dê um exemplo de duas funções $f_1 : X \rightarrow (Y_1, \tau_1)$ e $f_2 : X \rightarrow (Y_2, \tau_2)$ tais que

$$\mathcal{F} = \tau_{f_1} \cup \tau_{f_2}$$

não é uma topologia.

7.2.7. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{S}^1, \tau_{\mathbb{S}^1})$ a aplicação do Exemplo 7.11. Mostre que

$$\frac{1}{n} \xrightarrow{\tau_f} 7.$$

7.2.8. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{S}^1, \tau_{\mathbb{S}^1})$ a aplicação do Exemplo 7.11. Mostre que

$$n + \frac{1}{n} - 23 \xrightarrow{\tau_f} 11.$$

7.2.9. Seja $f : (\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}}) \rightarrow \mathbb{S}^1$ a aplicação do Exemplo 7.11. Fixado $x \in \mathbb{R}$, para cada $\varepsilon > 0$, seja $I_\varepsilon = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Mostre que

$$\mathcal{B}_x = \{f(I_\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$$

é uma base de vizinhanças de $f(x)$ na topologia final.

7.3 Topologia Produto

Quando temos dois espaços métricos, (A, d_A) e (B, d_B) , de que forma podemos gerar uma métrica em $A \times B$? Se A e B forem o conjunto dos números reais com a métrica usual (euclidiana), o que poderia ser a métrica em \mathbb{R}^2 ? Poderia ser a métrica euclidiana (Exemplo 1.10), ou a métrica do máximo (Exemplo 1.11), ou então a métrica da soma. Pelo exercício ??, todas essas métricas são topologicamente equivalentes e possuem a seguinte propriedade

Para uma sequência $(a_n, b_n) \in A \times B$ e $(a, b) \in A \times B$, temos que

$$(a_n, b_n) \rightarrow (a, b) \Leftrightarrow a_n \rightarrow a \text{ e } b_n \rightarrow b.$$

Esta propriedade é facilmente verificada para a métrica do máximo e, pela equivalência topológica, vale para todas as três. A topologia produto que queremos definir — lembre-se que não temos uma métrica — será exatamente a topologia da “convergência/continuidade coordenada a coordenada”.

Entre dois Espaços

Inspirados pelo fato de que na métrica do máximo (Exemplo 1.11) as bolas são na verdade quadrados, vamos definir o produto de dois espaços topológicos como sendo o espaço onde a base da topologia serão os “retângulos”.

Definição 7.19 (Topologia do Produto de dois Espaços). *Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) dois espaços topológicos. Definimos o espaço produto como sendo o espaço topológico $(X \times Y, \tau_{X \times Y})$, onde $\tau_{X \times Y}$ é gerada pelos conjuntos da forma $U \times V$, onde $U \in \tau_X$ e $V \in \tau_Y$.*

A topologia $\tau_{X \times Y}$ é chamada de topologia produto. Por um abuso de notação, escrevemos $\tau_X \times \tau_Y$ para designar a topologia produto. Quando queremos ser menos ambíguos, escrevemos $(X, \tau_X) \times (Y, \tau_Y)$.

As projeções canônicas em X e Y

$$\begin{aligned} \pi_X : X \times Y &\rightarrow X \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \pi_Y : X \times Y &\rightarrow Y \\ (x, y) &\mapsto y \end{aligned}$$

exercem papel fundamental no estudo das topologias produto.

Observação 7.20. Na Definição 7.19, poderíamos ter dito que a topologia produto é gerada pelos conjuntos da forma $U \times Y$ e $X \times V$, onde $U \in \tau_X$ e $V \in \tau_Y$. No entanto, os conjuntos da forma $U \times V$, além de geradores são também uma base da topologia. Isso está de acordo com a analogia com a métrica do máximo, onde as bolas — que são uma base para a topologia — são os “quadrados.” No caso da topologia produto, não temos “quadrados,” temos “retângulos.”

Proposição 7.21. *Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) dois espaços topológicos e $\tau_{X \times Y}$ uma topologia qualquer no conjunto $X \times Y$. As seguintes afirmações são equivalentes.*

1. *A topologia $\tau_{X \times Y}$ é a topologia produto. Ou seja,*

$$\tau_{X \times Y} = \tau_X \times \tau_Y.$$

2. *Os conjuntos da forma $A \times B$, onde $A \in \tau_X$ e $B \in \tau_Y$ formam uma base de $\tau_{X \times Y}$.*

3. *Os conjuntos da forma $A \times Y$ e $X \times B$, onde $A \in \tau_X$ e $B \in \tau_Y$ formam uma sub-base de $\tau_{X \times Y}$.*

4. *A topologia $\tau_{X \times Y}$ é a menor topologia em $X \times Y$ tal que as projeções canônicas são contínuas. Ou seja, é a topologia inicial induzida pelas projeções.*

5. *Toda aplicação $f : (Z, \tau_Z) \rightarrow (X \times Y, \tau_{X \times Y})$ com domínio em um espaço topológico Z qualquer é contínua se, e somente se, $\pi_X \circ f$ e $\pi_Y \circ f$ forem contínuas.*

Demonstração. ■ (1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3)

Imediato da definição de topologia produto e da Observação 5.15. Basta notar que $(X \times W) \cap (V \times Y) = V \times W$.

■ (3) \Leftrightarrow (4)

As projeções são contínuas se, e somente se, para todo $U \in \tau_X$ e $V \in \tau_Y$, $U \times Y = \pi_X^{-1}(U) \in \tau_{X \times Y}$ e $X \times V = \pi_Y^{-1}(V) \in \tau_{X \times Y}$. Assim, a menor topologia em $X \times Y$ que torna as projeções contínuas é a topologia gerada pelos conjuntos da forma $U \times Y$ e $X \times V$, para $U \in \tau_X$ e $V \in \tau_Y$.

■ (4) \Leftrightarrow (5)

É um caso particular da Proposição 7.14. □

Observação 7.22. Se para $f : Z \rightarrow X \times Y$ escrevermos

$$f(z) = (f_x(z), f_y(z)),$$

então $f_x = \pi_X \circ f$ e $f_y = \pi_Y \circ f$. O item (5) da proposição diz que na topologia produto, f é contínua se, e somente se, f_x e f_y são contínuas.

Observação 7.23. Seja $f : X \times Y \rightarrow Z$. O item (5) da Proposição 7.21 pode sugerir que a continuidade de f no ponto $(a, b) \in X \times Y$ seja equivalente à continuidade de $f(a, \cdot)$ e $f(\cdot, b)$. No entanto, a continuidade dessas duas seções de f é uma condição mais fraca que a continuidade de f .

Se $f(a, \cdot)$ é contínua em b , isso significa que se “nos aproximarmos” de (a, b) na “vertical”, o valor de f se aproxima de $f(a, b)$. A continuidade de $f(\cdot, b)$ em a corresponde à continuidade de f na “horizontal”. No entanto, isso não garante nada sobre o comportamento de f quando “nos aproximamos” de (a, b) pela “diagonal”, ou mesmo por um caminho em “espiral”. Um exemplo concreto é a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & , (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \end{cases} .$$

Neste caso, $f(0, y) = f(x, 0) = 0$. No entanto, $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$.

Observação 7.24. Para a topologia produto, também vale que

$$(x_n, y_n) \rightarrow (x, y) \Leftrightarrow x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y. \quad (7.1)$$

No entanto, como as sequências convergentes não determinam a topologia, não se pode afirmar que a condição acima determina a topologia produto.

Se ao invés de sequências, utilizássemos o conceito de *redes* — desenvolvido no Capítulo ?? —, a relação da equação 7.1 caracterizaria totalmente a topologia. Com redes no lugar de sequências, f será contínua se, e somente se, para toda rede $z_\lambda \rightarrow z$, tivermos

$$f_x(z_\lambda) \rightarrow f_x(z) \quad \text{e} \quad f_y(z_\lambda) \rightarrow f_y(z).$$

Produto Finito

As considerações que foram feitas para o produto de dois espaços topológicos podem ser facilmente estendidas para definir e caracterizar o produto de uma quantidade finita de espaços topológicos.

Definição 7.25. Dada uma família de espaços topológicos $(X_1, \tau_{X_1}), \dots, (X_n, \tau_{X_n})$, a topologia produto é a menor topologia de $X_1 \times \dots \times X_n$ onde as projeções em cada coordenada,

$$\begin{aligned} \pi_j : X_1 \times \dots \times X_n &\rightarrow X_j, \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto x_j \end{aligned}$$

são contínuas. O espaço (topológico) produto $(X_1, \tau_{X_1}) \times \dots \times (X_n, \tau_{X_n})$, é o conjunto $X_1 \times \dots \times X_n$, dotado da topologia produto.

O leitor fica encarregado de enunciar e demonstrar uma proposição análoga a 7.21.

Produto Infinito

Se temos um espaço topológico $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ para cada $\lambda \in \Lambda$, pela experiência com o produto de uma família finita de espaços topológicos podemos logo imaginar duas topologias que poderíamos chamar de *topologia produto*. Uma delas, seria a topologia em $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ gerada pela família dos conjuntos da forma $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, onde $A_\lambda \in \tau_\lambda$. Se estivéssemos falando de espaços métricos, seria como definir a métrica do supremo (veja o Exemplo ??). Esta topologia é bastante geométrica e intuitiva. No entanto, não é esta a topologia que chamamos de *topologia produto* da família τ_λ ($\lambda \in \Lambda$). A topologia produto é um pouco mais fraca, possui propriedades importantes (por exemplo, o Teorema 9.41) e é, em geral, mais fácil de se trabalhar.

Definição 7.26. Dada uma coleção qualquer de espaços topológicos $(X_\lambda, \tau_\lambda)$, a topologia produto é a menor topologia de $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ onde as projeções em cada coordenada,

$$\begin{aligned} \pi_\gamma : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda &\rightarrow X_\gamma, \\ (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} &\mapsto x_\gamma \end{aligned}$$

são contínuas. O espaço (topológico) produto $\prod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)$, é o conjunto $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, dotado da topologia produto.

Desta forma, a topologia produto é a topologia mais fraca tal que as projeções canônicas π_λ são contínuas. Novamente, o leitor fica encarregado de enunciar e demonstrar uma proposição análoga a 7.21.

Proposição 7.27. *Dada uma coleção qualquer de espaços topológicos $(X_\lambda, \tau_\lambda)$, seja X o espaço produto munido da topologia produto. Então, $f : Y \rightarrow X$ é contínua se, e somente se, $\pi_\lambda \circ f$ é contínua para todo $\lambda \in \Lambda$.*

Demonstração. Basta aplicar a Proposição 7.14. □

Exemplo 7.28. Considere o conjunto $X = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ e as seguintes normas

$$\|x\|_1 = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

$$\|x\|_2 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n+1} |x_n|.$$

A topologia da norma $\|\cdot\|_2$ é a topologia produto. De fato, nesta norma, a bola centrada em a , de raio $\varepsilon > 0$ é igual a

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} B_{(n+1)\varepsilon}(a_n) = B_\varepsilon(a_0) \times \cdots \times B_{(N+1)\varepsilon}(a_N) \times \prod_{n \in \mathbb{N}} [0, 1],$$

onde N é tal que $(N+1)\varepsilon > 1$.

A topologia da norma $\|\cdot\|_1$ é mais forte que a topologia produto. Neste caso, a bola centrada em a , de raio $\varepsilon > 0$ é igual a

$$[0, 1]^{\mathbb{N}} \cap \prod_{n \in \mathbb{N}} B_\varepsilon(a_n),$$

que pode não é aberto quando $B_\varepsilon(a_n) \neq [0, 1]$ para uma quantidade infinita de índices n .

Proposição 7.29. *Sejam $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ espaços topológicos, e π_γ as projeções canônicas*

$$\pi_\gamma : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \rightarrow X_\gamma.$$

Então, cada π_γ é uma aplicação aberta.

Demonstração. De fato, vamos mostrar que π_γ é uma aplicação aberta quando o produto $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ é dotado da topologia cuja base são os conjuntos da forma

$$A = \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda,$$

onde $A_\lambda \in \tau_\lambda$. Note que esta topologia é mais forte que a topologia produto, e portanto, se π_γ for uma aplicação aberta nesta topologia, será aberta na topologia produto. A imagem por π_γ de A é A_γ , que é aberto. Como a imagem de uniões é a união das imagens, e os abertos são uniões de elementos da base, segue que π_γ é uma aplicação aberta. □

Proposição 7.30. *Sejam $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ espaços topológicos, $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ o espaço produto e π_γ as projeções canônicas*

$$\pi_\gamma : X \rightarrow X_\gamma.$$

Então, escolhendo $x = (x_\lambda) \in X$, para cada $\gamma \in \Lambda$, o conjunto da forma

$$X(\gamma, x) = \bigcap_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \neq \gamma}} \pi_\lambda^{-1}(x_\lambda)$$

é homeomorfo a X_γ .

Demonstração. A topologia de $X(\gamma, x)$ é gerada pela família

$$X(\gamma, x) \cap \pi_\lambda^{-1}(A),$$

onde $\lambda \in \Lambda$, e A é um aberto de X_λ . Mas exceto quando $\lambda = \gamma$, esses conjuntos ou são vazios, ou iguais a $X(\gamma, x)$. Assim, a topologia de $X(\gamma, x)$ é gerada pela família

$$X(\gamma, x) \cap \pi_\gamma^{-1}(A),$$

onde A é um aberto de X_γ . Essa família é uma topologia. Portanto, esses são exatamente os abertos de $X(\gamma, x)$. Isso implica que a bijeção contínua $\pi_\gamma|_{X(\gamma, x)}$ é também uma aplicação aberta. De fato,

$$\pi_\gamma(X(\gamma, x) \cap \pi_\gamma^{-1}(A)) = A.$$

Ou seja, $\pi_\gamma|_{X(\gamma, x)}$ é um homeomorfismo. □

Exemplo 7.31 (Representação Decimal). Considere o conjunto $D = \{0, 1, \dots, 9\}$ dos dígitos de 0 a 9. O espaço $X = D^\mathbb{N}$ pode ser utilizado para representar números reais no intervalo $[0, 1]$. Enxergamos um elemento $(a_0, a_1, \dots) \in X$ como sendo o número real cuja representação decimal é $0, a_0 a_1 a_2 \dots$. Formalmente, a representação é feita pela função

$$f : \begin{array}{ccc} X & \rightarrow & [0, 1] \\ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto & \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n 10^{-n-1} \end{array} .$$

Note, no entanto, que a aplicação f não é uma bijeção. Apesar de f ser sobrejetiva, existem números que possuem duas representações distintas. Por exemplo,

$$0, 100000 \dots = 0, 099999 \dots .$$

Na topologia produto, uma sequência $a^n = (a_j^n)_{j \in \mathbb{N}}$ converge para $a = (a_j)_{j \in \mathbb{N}}$, quando para todo $j \in \mathbb{N}$, $a_j^n \rightarrow a_j$. No entanto, como D é discreto, isso significa que a partir de um certo $N = N_j$,

$$n \geq N \Rightarrow a_j^n = a_j.$$

Em outras palavras, para todo J , existe N tal que

$$n \geq N \Rightarrow \forall j \leq J, a_j^n = a_j.$$

Assim, na topologia produto, a^n converge para a quando para todo J , a partir de um certo n , os J primeiros termos de a^n coincidem com os J primeiros termos de a . Em particular, a aplicação f é contínua, pois se $a_n \in D^\mathbb{N}$ converge para $a \in D^\mathbb{N}$, então, para todo M , existe N tal que os primeiros M termos de a_n coincidem com os de a , para todo $n \geq N$. E isso implica que $f(a_n) \rightarrow f(a)$.

É comum utilizarmos o espaço $\{0, 1\}^\mathbb{N}$, ao invés de $D^\mathbb{N}$. Neste caso, trabalhamos com a *representação binária* dos elementos de $[0, 1]$.

Exemplo 7.32 (Espaço de Funções: convergência pontual). Sejam X um conjunto qualquer, e Y um espaço topológico. Podemos identificar as funções $f : X \rightarrow Y$ com os elementos do conjunto

$$Y^X = \prod_{x \in X} Y_x,$$

onde Y_x é uma cópia do espaço Y . Se dotarmos Y^X da topologia produto, temos uma noção de convergência no espaço das funções de X em Y . Nesta topologia, uma vizinhança V de $f : X \rightarrow Y$ são as funções $g : X \rightarrow Y$ que para um certo número finito de pontos (coordenadas) $x_1, \dots, x_n \in X$, $g(x_j)$ e $f(x_j)$ diferem “pouco”. Para que g pertença a esta vizinhança V , não faz diferença que valores g assume em pontos diferentes de x_1, \dots, x_n . Para ser preciso, uma vizinhança V é um conjunto que contém $\pi_{x_1}^{-1}(U_1) \cap \dots \cap \pi_{x_n}^{-1}(U_n)$ para determinados x_1, \dots, x_n , e determinadas vizinhanças $U_j \in \mathcal{V}((x_j))$.

Pela Proposição 5.17, uma sequência $f_n : X \rightarrow Y$ converge para $f : X \rightarrow Y$ nesta topologia, exatamente quando, para todo $x \in X$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$. Por isso, esta topologia no espaço das funções de X a Y é chamada de *topologia da convergência pontual*, ou *topologia da convergência ponto a ponto*.

Exercícios

7.3.1. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação qualquer entre os espaços topológicos X e Y . O gráfico de f é o conjunto

$$\text{Gr}(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}.$$

Mostre que quando f é contínua e Y é um espaço métrico, o seu gráfico é um subconjunto fechado de $X \times Y$. (Veja também a definição de espaço de Hausdorff: 9.29)

7.3.2. Encontre uma função contínua $f : X \rightarrow Y$ cujo gráfico não seja um subconjunto fechado de $X \times Y$.

7.3.3. Mostre que o conjunto

$$H = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y = \frac{1}{x} \right\}$$

é fechado em \mathbb{R}^2 .

7.3.4. Mostre que, apesar de

$$H = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y = \frac{1}{x} \right\}$$

ser um conjunto fechado pelo exercício 7.3.3, a projeção de H na primeira (e também na segunda) coordenada não é um conjunto fechado.

7.3.5. Explique o que representa o conjunto $X(\gamma, x)$ na Proposição 7.30.

7.3.6. Explique porque, na demonstração da Proposição 7.30, $X(\gamma, x) \cap \pi_\lambda^{-1}(A)$ ou é vazio ou é $X(\gamma, x)$ quando $\lambda \neq \gamma$.

7.3.7. Por que no Exemplo 7.31 pudemos afirmar que $f : X \rightarrow [0, 1]$ é contínua baseado apenas no fato de

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x)?$$

7.3.8. Seja $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ ($\lambda \in \Lambda$) uma família de espaços topológicos e $\Gamma \subset \Lambda$ um subconjunto de índices. Vamos denotar por

$$X_\Lambda = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \quad \text{e} \quad X_\Gamma = \prod_{\lambda \in \Gamma} X_\lambda.$$

Mostre que a aplicação

$$\Pi_\Gamma : \begin{array}{ccc} X_\Lambda & \rightarrow & X_\Gamma \\ (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} & \mapsto & (x_\lambda)_{\lambda \in \Gamma} \end{array}$$

é contínua e aberta.

7.3.9. No mesmo contexto do Exercício 7.3.8, suponha que $\tilde{\Gamma}$ é uma partição de Λ . Mostre que a aplicação

$$f : \begin{array}{ccc} X_\Lambda & \rightarrow & \prod_{\Gamma \in \tilde{\Gamma}} X_\Gamma \\ x & \mapsto & (\Pi_\Gamma(x))_{\Gamma \in \tilde{\Gamma}} \end{array}$$

é um homeomorfismo.

7.4 Topologia Quociente

Quando temos um conjunto qualquer X , é comum querermos identificar uma classe de pontos de X como se fossem um só. Por exemplo, o círculo pode ser visto como o intervalo $[0, 1]$ com os pontos 0 e 1 identificados. A ideia é particionar X em classes de equivalência. O intervalo $[0, 1]$ com os pontos 0 e 1 identificados corresponde à partição

$$\{\{0, 1\}\} \cup \{\{x\} \mid x \in (0, 1)\}.$$

O círculo também pode ser visto como \mathbb{R} com os pontos x e y identificados sempre que $x - y \in \mathbb{Z}$. Neste caso, \mathbb{R} é particionado pela família

$$\{x + \mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{R}\},$$

onde $x + \mathbb{Z} = \{x + z \mid z \in \mathbb{Z}\}$.

Ou seja, tomamos uma família \tilde{X} de subconjuntos $A \subset X$ disjuntos, tais que

$$X = \bigcup_{A \in \tilde{X}} A.$$

Existe uma projeção natural

$$\begin{aligned} \pi : X &\rightarrow \tilde{X}, \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

onde $[x]$ é o único elemento $A \in \tilde{X}$ tal que $x \in A$. Assim, podemos colocar em \tilde{X} a topologia final induzida por π .

Relação de Equivalência

Estamos preocupados em “particionar” um conjunto X e pensar no conjunto \tilde{X} formado pelos elementos da partição escolhida. Uma maneira muito comum de se escolher uma partição de X é através de uma *relação de equivalência*. Não vamos entrar em detalhes quanto às propriedades das relações de equivalência, mas de fato, definir uma *relação de equivalência* no conjunto X equivale a particioná-lo.

Definição 7.33. *Uma relação \sim em um conjunto X é simplesmente um subconjunto de X^2 . Usualmente escrevemos*

$$a \sim b$$

ao invés de dizer que (a, b) pertence à relação \sim .

Definição 7.34. *Uma relação (binária) \sim definida em um conjunto X é uma relação de equivalência se satisfizer, para todo $a, b, c \in X$,*

1. $a \sim a$.
2. $a \sim b \Rightarrow b \sim a$.
3. $a \sim b$ e $b \sim c \Rightarrow a \sim c$.

Definir uma relação de equivalência em X é equivalente a particioná-lo, pois dada uma relação de equivalência podemos particionar X em *classes de equivalência*, ou seja, nos conjuntos

$$[a] = \{x \in X \mid x \sim a\}.$$

Do mesmo modo, dada uma partição A_λ de X , podemos definir a relação de equivalência

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists A_\lambda \text{ tal que } a, b \in A_\lambda.$$

Notação. *Dada uma relação de equivalência \sim em X , denotamos por X/\sim o conjunto das classes de equivalência de \sim . A projeção natural de X em X/\sim é a aplicação dada por*

$$\begin{aligned} \pi : X &\rightarrow X/\sim, \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

Ao identificarmos, por exemplo, os pontos 0 e 1 do intervalo $[0, 1]$ para formar o círculo, chamando esse ponto identificado de p , a topologia que esperamos deve ser tal que, uma sequência converge para o ponto p sempre que se aproximar do conjunto $\{0, 1\}$. Dessa forma, uma sequência que se aproxima de $p = \{0, 1\}$ é uma sequência que se aproxima de 0, ou de 1, ou que “oscila” entre esses dois pontos. O que queremos, é que cada vizinhança de p seja união de uma vizinhança de 0 e uma vizinhança de 1. Ou seja, queremos que a projeção canônica, $\pi : [0, 1] \rightarrow (0, 1) \cup \{p\}$ seja contínua. Mas também, não esperamos que uma sequência que nem mesmo se aproxima de 0 ou de 1 seja considerada uma sequência que se aproxima de p . Queremos que a topologia seja a mais forte possível com esta propriedade.

Definição 7.35 (Topologia Quociente). *Quando X é um espaço topológico e \sim uma relação de equivalência definida sobre X , a topologia quociente em X/\sim é a topologia final induzida pela projeção natural.*

Seja X um conjunto e \sim uma relação de equivalência em X . Suponha que a aplicação

$$f : X \rightarrow Y$$

seja tal que $a \sim b \Rightarrow f(a) = f(b)$. Neste caso, podemos definir

$$\tilde{f} : X/\sim \rightarrow Y \quad .$$

$$[x] \mapsto f(x)$$

Note que o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \pi \downarrow & \searrow f & \\ X/\sim & \xrightarrow{\tilde{f}} & Y \end{array}$$

é comutativo. Assim, pela Proposição 7.15, sabemos que a topologia quociente fará com que uma eventual continuidade da aplicação f seja equivalente à continuidade de \tilde{f} .

Construções com “quocientes” são muito comuns, por exemplo, em álgebra, onde quocientamos grupos por subgrupos, anéis por ideais, espaços vetoriais por subespaços vetoriais e assim por diante. Em muitos casos, essas estruturas algébricas são também dotadas de topologia. Mais a diante, no Capítulo ??, por exemplo, veremos como o estudo da topologia pode facilitar a compreensão desses espaços.

Exemplos

Exemplo 7.36 (O Círculo Unitário \mathbb{S}^1). O círculo unitário \mathbb{S}^1 pode ser visto, dentre outras maneiras, como o subconjunto dos números complexos de valor absoluto 1, ou como o conjunto \mathbb{R}/\sim , onde

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}.$$

Costumamos denotar este quociente por \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

Neste caso, podemos pensar, por exemplo, nas seguintes topologias em \mathbb{S}^1 :

1. A topologia induzida em \mathbb{S}^1 quando visto como um subconjunto de \mathbb{C} .
2. A topologia final induzida pela aplicação

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \quad .$$

$$x \mapsto \exp(2\pi ix)$$

3. A topologia quociente dada pela identificação usual entre \mathbb{S}^1 e \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

As topologias dos itens (2) e (3) são de fato a mesma topologia. Isso porque a relação de equivalência do item (3) é dada exatamente por

$$a \sim b \Leftrightarrow f(a) = f(b),$$

fazendo com que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & & \\ \pi \downarrow & \searrow f & \\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C} \end{array}$$

seja comutativo. Onde \tilde{f} é justamente a bijeção que usualmente identifica \mathbb{R}/\mathbb{Z} e \mathbb{S}^1 . As aplicações f e π são contínuas respectivamente na topologia final induzida por f e na topologia final (topologia quociente) induzida por π . Pela caracterização de topologia final dada pela Proposição 7.15, isso implica que tanto \tilde{f} quanto \tilde{f}^{-1} são contínuas. Ou seja, \tilde{f} é um homeomorfismo.

Quanto à equivalência entre os itens (1) e (3), considere \mathbb{S}^1 com a topologia induzida. Sabemos que, como f é contínua (Exercício 7.4.1), então \tilde{f} também é. Para concluir que todas as três topologias são iguais, precisamos mostrar que \tilde{f}^{-1} é contínua quando \mathbb{S}^1 é dotado da topologia induzida. Isso será feito mais adiante. Será consequência direta da Proposição 9.34.

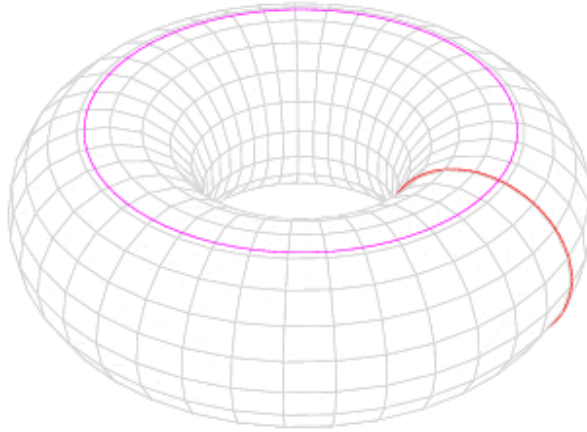


Figura 7.1: Um toro bidimensional, além de poder ser visto como um subespaço do \mathbb{R}^3 , pode também ser identificado com o produto cartesiano $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. O toro não é sólido. É apenas a “casca da figura”.

Exemplo 7.37 (O Toro \mathbb{T}^n). A forma da Figura 7.1 é o chamado *toro bidimensional*: \mathbb{T}^2 . Uma generalização é o *toro n -dimensional*: \mathbb{T}^n . O círculo é o *toro unidimensional*.

O toro n -dimensional pode ser definido como o espaço produto $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ de n cópias do círculo unitário (Figura 7.1), mas também pode ser visto como o espaço quociente \mathbb{R}^n / \sim , onde a relação \sim é dada por

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}^n.$$

Costumamos denotar este quociente por $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$.

Assumindo que \mathbb{S}^1 é munido da topologia do item (2) do Exemplo 7.36, podemos colocar no toro a topologia produto ou a topologia quociente. Novamente, ambas as topologias irão coincidir. Para ver isso, basta considerar o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & & \\ \pi \downarrow & \searrow f & \\ \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1 \end{array},$$

onde \tilde{f} é dado por

$$\tilde{f}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n & \rightarrow & \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1 \\ ([x_1], \dots, [x_n]) & \mapsto & (\exp(2\pi i x_1), \dots, \exp(2\pi i x_n)) \end{array}.$$

Note que \tilde{f} é a identificação usual entre $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ e \mathbb{T}^n .

Exercícios

7.4.1. Mostre que,

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \exp(2\pi i x) \end{array},$$

onde $\exp(i\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$, é contínua nas topologias usuais de \mathbb{R} e \mathbb{C} .

7.4.2. Suponha que a projeção canônica $\pi : X \rightarrow X / \sim$ seja uma aplicação aberta e que $f : X / \sim \rightarrow (Y, \tau_Y)$ é uma bijeção. Então,

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \pi \downarrow & \searrow f \circ \pi & \\ X / \sim & \xrightarrow{f} & Y \end{array},$$

f é homeomorfismo se, e somente se, $f \circ \pi$ é aberta e fechada.

7.4.3. Dê um exemplo de uma relação de equivalência \sim em X tal que a projeção canônica $\pi : X \rightarrow X/\sim$ não é aberta.

7.5 Topologias das Sequências Convergentes

Esta seção pode (e deve!) ser omitida. É apenas uma divagação sobre convergência de sequências. Ao fazer analogia com os espaços métricos, o estudante frequentemente se pergunta porque é que nem sempre se pode usar sequências para determinar as propriedades topológicas de um espaço.

Se temos um conjunto X e uma topologia τ_X sobre X , sabemos exatamente quais são e quais não são as sequências convergentes. No entanto, conhecer as sequências convergentes não garante que conheçamos a topologia. De fato, duas topologias distintas podem ter exatamente as mesmas sequências convergentes, convergindo para os mesmos limites.

Exemplo 7.38 (Topologia Coenumerável). Seja X um conjunto não enumerável, e

$$\tau_1 = \mathcal{P}(X).$$

As sequências convergentes em τ_1 são aquelas que a partir de um certo índice se tornam constantes. Ou seja, as sequências constantes a menos de um número finito de termos.

Considere agora τ_2 dada por

$$\tau_2 = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X \mid A^c \text{ é enumerável}\}.$$

Fica como exercício mostrar que τ_2 é de fato uma topologia. Evidentemente que as sequências constantes a menos de um número finito de termos convergem nesta e em qualquer outra topologia. Considere então a sequência x_1, x_2, \dots . Suponha que

$$x_n \xrightarrow{\tau_2} x.$$

O conjunto

$$V = \{x_n \mid x_n \neq x\}^c$$

é vizinhança aberta de x em τ_2 . A convergência de x_n implica que para um certo N ,

$$n > N \Rightarrow x_n \in V.$$

Mas x_n só está em V se $x_n = x$. Ou seja, x_n é constante a menos, possivelmente, de x_1, \dots, x_N .

Pergunta: porque sabemos que $\tau_1 \neq \tau_2$?

Dado um espaço topológico (X, τ_X) , podemos indagar se existe uma topologia τ_m que é a menor onde as sequências convergentes são as mesmas que de τ_X . Também podemos nos perguntar se não existe a maior topologia τ_M com esta mesma propriedade. Se existir, τ_m será a interseção da família de todas as topologias τ_λ ($\lambda \in \Lambda$) tais que para todo $x \in X$,

$$x_n \xrightarrow{\tau_\lambda} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\tau_X} x.$$

Vamos definir τ_m como sendo

$$\tau_m = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda.$$

Evidentemente que como $\tau_m \subset \tau_X$, então toda vizinhança de x em τ_m também é uma vizinhança em τ_X . Portanto,

$$x_n \xrightarrow{\tau_X} x \Rightarrow x_n \xrightarrow{\tau_m} x.$$

No entanto, a implicação contrária pode não ser verdadeira. Ou seja, é possível que, para a topologia τ_m , não tenhamos

$$x_n \xrightarrow{\tau_m} x \Rightarrow x_n \xrightarrow{\tau_X} x.$$

Para um exemplo, veja:

<http://math.stackexchange.com/questions/395980/topology-for-convergent-sequences> Para compreender o exemplo é necessário conhecer um conceito mais avançado chamado “ultrafiltro”. Para nossos propósitos, basta dizer que o exemplo se trata de uma família de topologias τ_β no conjunto $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tais que $x_n \xrightarrow{\tau_\beta} \infty$ equivale à existência de N tal que

$$n \geq N \Rightarrow x_n = \infty.$$

No entanto, em $\tau = \bigcap \tau_\beta$, $x_n \xrightarrow{\tau} \infty$ equivale à existência de N tal que

$$m > n \geq N \Rightarrow x_m \neq x_n \text{ ou } x_m = x_n = \infty.$$

Ou seja, $x_n \xrightarrow{\tau} \infty$ sempre que x_n “sai” de qualquer subconjunto finito de \mathbb{N} .

Por outro lado, vamos definir a topologia

$$\tau_M = \left\{ V \subset X \mid x_n \xrightarrow{\tau_X} x \in V \Rightarrow \exists N, \forall n \geq N, x_n \in V \right\}.$$

É evidente que τ_M é uma topologia e é mais forte que τ_X . O leitor é convidado a demonstrar essa afirmação.

Como $\tau_X \subset \tau_M$, sabemos que

$$x_n \xrightarrow{\tau_M} x \Rightarrow x_n \xrightarrow{\tau_X} x.$$

Por outro lado, pela definição de τ_M , sabemos que

$$x_n \xrightarrow{\tau_X} x \Rightarrow x_n \xrightarrow{\tau_M} x. \quad (7.2)$$

Ou seja, sempre existe a topologia mais forte determinada pela família de sequências convergentes de uma topologia τ_X dada. Em outras palavras, denotando por \mathcal{F} a família de topologias

$$\mathcal{F} = \{ \tau_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \},$$

temos que $\tau_M = \bigvee \mathcal{F}$ é tal que $\tau_M \in \mathcal{F}$, mas pode ocorrer que $\tau_m = \bigwedge \mathcal{F}$ não pertença a \mathcal{F} .

Exercícios

7.5.1. Mostre que a *topologia coenumerável* (τ_2 no Exemplo 7.38) é de fato uma topologia.

7.5.2. Por que sabemos que $\tau_1 \neq \tau_2$ no Exemplo 7.38?

7.5.3. Demonstre a implicação da Equação 7.2 na página 65.

Conexidade

Ao final da seção 7.1, discutimos a construção de um espaço topológico formado pela união disjunta de dois outros espaços. Os espaços conexos são espaços que não podem ser obtidos desta maneira. A conexidade é uma propriedade preservada pelas aplicações contínuas (Teorema 8.10), e a forma mais simples deste fenômeno é o conhecido Teorema do Valor Intermediário (Corolário 8.11).

8.1 Definição e Exemplos

Definição 8.1 (Conexidade). *Um espaço topológico X é conexo quando não puder ser escrito como união disjunta não trivial de abertos. Ou seja, se*

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda,$$

onde todos os A_λ são abertos, não-vazios e disjuntos, então $\#\Lambda \leq 1$.

Um subconjunto de um espaço topológico é conexo quando for conexo na topologia induzida. Um subconjunto que não é conexo é desconexo.

Exemplo 8.2. Um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ é um conjunto que satisfaz

$$a, b \in I, a < x < b \Rightarrow x \in I.$$

Se $Y \subset \mathbb{R}$ não é um intervalo, então não é conexo. De fato, tome $a, b \in Y$ e $x \notin Y$ com $a < x < b$. Então $Y = (Y \cap (-\infty, x)) \cup (Y \cap (x, \infty))$, e portanto, Y é desconexo.

Em um espaço conexo X , um argumento padrão consiste em mostrar que os pontos $x \in X$ que satisfazem determinada propriedade $P(x)$ formam um aberto, e os pontos que não satisfazem $P(x)$ também formam um aberto. Como o espaço não é união disjunta não-trivial de abertos, ou teremos que todos os pontos satisfazem $P(x)$, ou que nenhum ponto satisfaz $P(x)$.

Exemplo 8.3. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo. Então, dois pontos quaisquer de A podem ser ligados por um “caminho contínuo” em A . Ou seja, dados $a, b \in A$, existe $f : [0, 1] \rightarrow A$ contínua, com $f(0) = a$ e $f(1) = b$. Vamos apenas esboçar a demonstração. Os pormenores da demonstração ficam como exercício.

Seja C o conjunto dos pontos que podem ser ligados a a . Então, C é aberto. De fato, se $c \in C$, tomando $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(c) \subset A$, temos que todos os pontos $b \in B_\varepsilon(c)$ podem ser ligados a c por um “caminho retilíneo”. Assim, “concatenando” o caminho de a até c com o caminho de c até b , temos um caminho de a até b . Portanto, $B_\varepsilon(c) \subset C$. Ou seja, C é aberto.

Por outro lado, se $c \notin C$, tomando novamente $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(c) \subset A$, temos que nenhum ponto de $B_\varepsilon(c)$ pode ser ligado a a (por quê?). Ou seja, $A \cap C^c$ é aberto. Como $a \in C$, C é não-vazio. Assim, podemos concluir pela conexidade de A que $C = A$.

Exemplo 8.4. Mais adiante (Proposição 8.9), mostraremos que os intervalos são conexos na topologia usual de \mathbb{R} .

Para $t \in [0, 1]$, considere uma família de curvas

$$\alpha_t : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}^*.$$

Seja $N : [0, 1] \rightarrow \mathbb{Z}$ o “número total de voltas” que a curva α_t faz em torno da origem. Imagine que de alguma forma saibamos que $N(t)$ é contínua. Então, o “número total de voltas” é o mesmo para todas as curvas α_t . De fato, o intervalo $[0, 1]$ pode ser escrito como

$$[0, 1] = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} N^{-1}(n).$$

Como \mathbb{Z} é discreto, todo subconjunto de \mathbb{Z} é aberto. Assim, pela continuidade de $N(t)$, os conjuntos $N^{-1}(n)$ são todos abertos (e disjuntos). Pela conexidade do intervalo $[0, 1]$, existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$[0, 1] = N^{-1}(n_0).$$

Exemplo 8.5. Nenhum subconjunto de \mathbb{Q} com mais de um elemento é conexo (na topologia induzida da topologia usual de \mathbb{R}). De fato, seja $S \subset \mathbb{Q}$, com $a, b \in S$ distintos. Escolha $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ entre a e b . Então,

$$S = (S \cap (-\infty, c)) \cup (S \cap (c, \infty)).$$

Note que esse exemplo é um caso particular do Exemplo 8.2. O que de fato fizemos, foi mostrar que S não é um intervalo, escolhendo $c \notin S$ entre a e b . Por ter essa propriedade, de que todos os conjuntos com mais de um elemento são desconexos, dizemos que \mathbb{Q} é *totalmente desconexo*.

Como de costume, vamos ver maneiras diferentes para dizer se um conjunto é ou não conexo. Note que em um espaço topológico X , os conjuntos \emptyset e X são abertos e fechados ao mesmo tempo. Diremos que um conjunto $F \subset X$ é aberto e fechado não-trivial quando for diferente de \emptyset e X .

Proposição 8.6. *Seja (X, τ_X) um espaço topológico. Então, são equivalentes:*

1. X é conexo.
2. Não existem $U, V \in \tau_X$ não-vazios e disjuntos tais que $X = U \cup V$.
3. Não existe $A \subsetneq X$ aberto e fechado não trivial. Ou seja, os únicos subconjuntos de X que são abertos e fechados ao mesmo tempo são \emptyset e o próprio X .

Se $Y \subset X$, então são equivalentes:

- a. Y é conexo.
- b. Se $U, V \in \tau_X$ são tais que $Y \cap U \cap V = \emptyset$ e $Y \subset U \cup V$, então ou $Y \subset U$, ou $Y \subset V$.
- c. Não existem um aberto A e um fechado F tais que

$$\emptyset \subsetneq A \cap Y = F \cap Y \subsetneq Y.$$

Demonstração. ■ (1) \Leftrightarrow (2).

É evidente que se X for conexo, não podem existir U e V como os do item (2). Por outro lado, se X não for conexo, existe uma família de abertos A_λ ($\lambda \in \Lambda$), com $\#\Lambda > 1$, não-vazios disjuntos, tais que

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda.$$

Agora é só separar Λ em duas partes não triviais Λ_1 e Λ_2 , e fazer

$$U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_1} A_\lambda \quad \text{e} \quad V = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_2} A_\lambda.$$

■ (2) \Leftrightarrow (3).

Basta fazer $A = U$ para obter um conjunto aberto e fechado a partir do item (2). Ou então, fazer $U = A$ e $V = A^c$ para obter os conjuntos do item (2) a partir de um aberto e fechado A .

■ (a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c).

É só usar o fato de que um aberto (um fechado) de Y na topologia induzida é da forma $A \cap Y$, onde A é um aberto (um fechado) de X . □

Corolário 8.7. *Um espaço topológico X é desconexo se, e somente se, todo $x \in X$ for tal que exista um conjunto $F \subsetneq X$ aberto e fechado, com $x \in F$.*

Demonstração. É evidente que se existe um tal F , então X não é conexo. Por outro lado, se X é desconexo, então existe um aberto e fechado não trivial A . Se $x \in A$, então basta tomar $F = A$. Se $x \notin A$, então basta tomar $F = A^c$. \square

Exemplo 8.8. Seja $S \subset \mathbb{Q}$, com $a, b \in S$ distintos. Vamos mostrar novamente (veja o Exemplo 8.5) que S não é conexo. Tome $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ entre a e b . Então,

$$A = (c, \infty) \quad \text{e} \quad F = [c, \infty)$$

satisfazem

$$\emptyset \subsetneq A \cap S = F \cap S \subsetneq S.$$

Contrariando o item (c) da Proposição 8.6.

Como já é esperado, vamos mostrar que os subconjuntos conexos de \mathbb{R} são exatamente os intervalos.

Proposição 8.9. *Um subconjunto de \mathbb{R} é conexo se, e somente se, for um intervalo.*

Demonstração. No Exemplo 8.2, já mostramos que os conjuntos conexos são intervalos. Vamos mostrar então que todos os intervalos são conexos.

Suponha então que $D \subset \mathbb{R}$ é um intervalo desconexo. Sejam U e V abertos como os do item (b) da Proposição 8.6. Escolha $a \in U \cap D$, e $b \in V \cap D$. Podemos supor que $a < b$. Seja I_a o maior intervalo aberto tal que

$$a \in I_a \subset U.$$

Para ver que tal I_a existe, basta tomar a união de todos os intervalos abertos que contém a e estão contidos em U . Então, $I_a = (s, t)$, com $t \leq b$. Como D é um intervalo, $t \in D$. Além disso, pela maximalidade de I_a , temos que $t \notin U$. Assim,

$$[a, t) \subset U \cap D \quad \text{e} \quad t \in V \cap D.$$

Mas como V é vizinhança de t , e t está no fecho de $[a, t)$, temos que $V \cap [a, t) \neq \emptyset$. Em particular, $V \cap U \cap D \neq \emptyset$. Contrariando a escolha de U e V . \square

8.2 Conexidade e Continuidade

A propriedade mais importante dos conjuntos conexos é que sua imagem por aplicações contínuas é também conexa. Já utilizamos este fato (de forma oculta) no Exemplo 8.4.

Teorema 8.10. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Se $A \subset X$ é conexo, então $f(A)$ é um subconjunto conexo de Y .*

Demonstração. Restringindo o domínio e o contra-domínio de f , podemos assumir que $A = X$, e que $f(A) = Y$. Se Y não é conexo, então existe $F \subsetneq Y$ não-trivial que é aberto e fechado. Pela continuidade de f , $f^{-1}(F)$ é um subconjunto de X não-vazio que é aberto e fechado. Como f é sobrejetiva, temos que

$$\emptyset \subsetneq f^{-1}(F) \subsetneq X.$$

Portanto, X não é conexo. \square

Uma aplicação contínua $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ é uma aplicação tal que f^{-1} transporta τ_Y pra dentro de τ_X . Alternativamente à demonstração anterior, poderíamos ter optado por escolher abertos como os do item (a), (b) ou (c) da Proposição 8.6, e mostrar que esses abertos são levados em abertos de X que satisfazem as mesmas condições. Ao reduzir o problema para o caso em que f é uma bijeção, o passo seguinte constituiu em mostrar que a imagem inversa de um conjunto desconexo por uma aplicação contínua também é desconexo.

Corolário 8.11 (Teorema do Valor Intermediário). *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo qualquer, e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação contínua. Então, $f(I)$ é um intervalo.*

Demonstração. A Proposição 8.9 mostra que um subconjunto de \mathbb{R} é conexo se, e somente se, for um intervalo. Agora é só aplicar o Teorema 8.10. \square

8.3 Propriedades

Por vezes, é importante construir um conjunto e ao mesmo tempo garantir que o conjunto construído será conexo. A maneira mais simples de se fazer isso, é utilizando a proposição que segue.

Proposição 8.12. *Seja C_λ uma família de subconjuntos conexos de um espaço topológico X , tal que existe*

$$c \in \bigcap C_\lambda.$$

Então a união $\bigcup C_\lambda$ é um conjunto conexo.

Demonstração. A forma tradicional de se demonstrar é tomando um par de abertos U e V que “particionam” $\bigcup C_\lambda$, e mostrar que esses abertos “particionam” ao menos um dos C_λ . Demonstrar dessa forma fica como exercício. Vamos fazer por um outro ângulo. ;-)

Podemos assumir sem perda de generalidade que a união dos C_λ é todo o espaço X (porquê?). Suponha, então, que $F \subset X$ é um conjunto que é aberto e fechado com $c \in F$. Na topologia induzida em C_λ , os conjuntos $C_\lambda \cap F$ são abertos e fechados não-vazios, e portanto, são iguais a C_λ . Ou seja, $C_\lambda \subset F$. O que mostra que $F = X$. \square

Proposição 8.13. *Seja X um espaço topológico e $C \subset X$ um subconjunto conexo. Então, qualquer conjunto $D \subset X$ satisfazendo*

$$C \subset D \subset \overline{C}$$

é conexo.

Demonstração. Novamente, fica como exercício para o leitor utilizar um argumento que envolva um particionamento por abertos como o do item (b) da Proposição 8.6.

Podemos assumir que $D = X$ (por quê?). Seja F um conjunto aberto e fechado não vazio. Por ser aberto, F intersecta C (veja a Seção 6.1). Mas, como C é conexo, temos que $F \cap C = C$. Ou seja,

$$C \subset F.$$

Mas como F é fechado, tomando o fecho, obtemos

$$X = \overline{C} \subset F.$$

Portanto, os únicos conjuntos que são abertos e fechados ao mesmo tempo são \emptyset e X . \square

Por vezes, nos deparamos com propriedades em classes de conjuntos, que são *fechadas por união*. Ou seja, se a família de conjuntos C_λ possui a propriedade, então o conjunto formado pela união dos C_λ também possui a mesma propriedade. Neste caso, podemos falar do maior conjunto que tem a tal propriedade. No caso de conexidade em espaços topológicos, a Proposição 8.12 nos permite fazer isso. Seja \mathcal{F}_x a família de todos os subconjuntos do espaço topológico que sejam conexos e contenham x . Então, pela Proposição 8.12, o conjunto

$$C_x = \bigcup_{C \in \mathcal{F}_x} C$$

é conexo e contém x . Evidentemente que este é o maior conexo que contém x .

Definição 8.14 (Componente Conexa). *Seja X um espaço topológico, e $x \in X$ um ponto qualquer de X . Então, a componente conexa de x é o maior conexo de X que contém o ponto x .*

Proposição 8.15. *As componentes conexas particionam um espaço topológico X . Em especial, a relação “ x e y estão na mesma componente conexa” é uma relação de equivalência.*

Demonstração. Para um elemento qualquer $x \in X$, vamos denotar por C_x a componente conexa de x . É evidente que $X = \bigcup_{x \in X} C_x$. Precisamos mostrar apenas que

$$y \in C_x \Rightarrow C_x = C_y.$$

Mas isso é evidente, já que

$$y \in C_x \Rightarrow C_x \cup C_y \text{ é conexo.}$$

\square

Proposição 8.16. *Em um espaço topológico X , a componente conexa de um ponto $x \in X$ qualquer é fechada.*

Demonstração. É imediato da Proposição 8.13 e da maximalidade da componente conexa. \square

As componentes conexas de um aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ são abertas, mas isso nem sempre acontece em outros espaços topológicos. Os Exemplos 8.5 e 8.8 mostram que as componentes conexas de \mathbb{Q} são conjuntos unitários, que não são abertos na topologia induzida de \mathbb{R} em \mathbb{Q} .

Exemplo 8.17. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um aberto, e $C \subset A$ uma componente conexa de A . Vamos verificar que C é aberto. Para tanto, note que dado $a \in C$, existe um intervalo (conexo) aberto V , com $a \in V \subset A$. Pela maximalidade de C , temos que $V \subset C$. Ou seja, C é vizinhança de todos os seus pontos.

Se, em uma família de espaços topológicos um deles não é conexo, é fácil ver que o produto desses espaços também não é conexo. E se todos forem conexos, será que ainda assim o produto pode ser desconexo?

Proposição 8.18. *O produto X de uma família X_λ ($\lambda \in \Lambda$) de espaços topológicos não vazios é conexo se, e somente se, todos os espaços X_λ forem conexos.*

Demonstração. Se o produto é conexo, então $X_\lambda = \pi_\lambda(X)$ é a imagem de um conexo por uma aplicação contínua. Portanto, pelo Teorema 8.10, cada X_λ é conexo.

Suponha que todos os X_λ são conexos. Tome $x = (x_\lambda) \in X$. Pela Proposição 7.30, para cada $\gamma \in \Lambda$, os conjuntos

$$X(\gamma, x) = \bigcap_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \neq \gamma}} \pi_\lambda^{-1}(x_\lambda)$$

são homeomorfos a X_γ , e portanto, são conexos. Note que todos eles contém o elemento x . Pela Proposição 8.12, a união

$$X(x) = \bigcup_{\gamma \in \Lambda} X(\gamma, x)$$

é conexa. Note que $X(x)$ é o conjunto de todos os elementos de X que diferem de x em no máximo uma entrada.

Seja $u \in X$ um elemento qualquer. Denote por C_u a componente conexa de u . Vamos mostrar que C_u é denso em X . O argumento anterior, mostra que se $x \in C_u$, então $X(x) \subset C_u$. Por indução, todos os elementos que diferem de u em apenas um número finito de entradas pertencem a u .

Tome um aberto $A \subset X$ da forma

$$A = \bigcap_{j=1}^n \pi_{\lambda_j}^{-1}(A_j).$$

Esses abertos formam uma base da topologia produto. Seja $a = (a_\lambda)$ tal que $a_\lambda \in A_j$ para $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, e $a_\lambda = u_\lambda$ para $\lambda \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Então, $a \in A$, e $a \in X(u) \subset C_u$. E portanto, C_u é denso em X . Como C_u é fechado, $C_u = X$. \square

Exercícios

8.3.1. Explique o que é a “maximalidade” das componentes conexas mencionadas na demonstração da Proposição 8.16 e no Exemplo 8.17.

8.3.2. Explique melhor a demonstração da Proposição 8.16.

8.3.3. Mostre que se C é um subconjunto conexo de um espaço topológico X , e se $F \subset X$ é um conjunto aberto e fechado que intersecta C , então, $C \subset F$.

8.3.4. Mostre que um conjunto que é aberto e fechado em um espaço topológico X é união de componentes conexas.

8.3.5. Utilize o Exercício 8.3.4 para concluir que as componentes conexas de um espaço topológico são conjuntos abertos e fechados.

8.3.6. Mostre que as componentes conexas de um aberto A de $[0, 1]$ são intervalos abertos em $[0, 1]$.

8.3.7. Mostre que as componentes conexas de um aberto A de \mathbb{R}^n são conjuntos abertos.

8.3.8. Na Proposição 8.12, porque podemos assumir que X é a união de todos os C_λ ?

8.3.9. Na Proposição 8.12, por que fazemos a seguinte afirmação?

Na topologia induzida em C_λ , $C_\lambda \cap F$ é fechado e aberto.

Não poderíamos simplesmente ter afirmado que $C_\lambda \cap F$ é fechado e aberto?

8.3.10. Na Proposição 8.13, porque podemos assumir que $X = D$?

8.4 Conexidade por Caminhos

Os espaços como os do Exemplo 8.3, onde todos os pontos podem ser ligados por um “caminho contínuo”, são os espaços *conexos por caminhos*. Vamos definir formalmente e verificar algumas propriedades interessantes dos espaços conexos por caminhos. Em especial, vamos ver que a conexidade por caminhos é uma propriedade mais forte que a conexidade. Ou seja, todos os espaços conexos por caminhos são conexos.

Definição 8.19 (Caminho). *Seja X um espaço topológico. Um caminho em X é uma aplicação contínua*

$$f : [0, 1] \rightarrow X.$$

Dados $a, b \in X$, um caminho ligando a a b é um caminho em X tal que $f(0) = a$ e $f(1) = b$.

Observação 8.20. Uma aplicação contínua $f : I \rightarrow X$, onde I é um intervalo fechado e limitado de \mathbb{R} pode ser facilmente transformada em um caminho (com domínio $[0, 1]$). Por isso, de agora em diante, vamos usar um certo abuso de linguagem e, neste caso, também vamos dizer que f é um caminho em X .

Proposição 8.21. *Sejam f e g caminhos em um espaço topológico X ligando os pontos $a, b \in X$ e $b, c \in X$ respectivamente. Então, a aplicação*

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & , 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1) & , \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

é um caminho em X ligando a e c .

Demonstração. A parte mais difícil é mostrar que $f * g$ é contínua no ponto $\frac{1}{2}$. Seja $V \subset X$ uma vizinhança de $b = (f * g)(\frac{1}{2})$. Então,

$$\begin{aligned} (f * g)^{-1}(V) &= \frac{1}{2}f^{-1}(V) \cup \frac{1}{2}(1 + g^{-1}(V)) \\ &\supset \frac{1}{2}(\alpha, 1] \cup \frac{1}{2}(1 + [0, \beta)) \\ &= \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta + 1}{2}\right). \end{aligned}$$

Portanto, $f * g$ é contínua em $\frac{1}{2}$. □

A Proposição 8.21 mostra que a relação de “existir um caminho ligando x a y ” é transitiva. Como é evidentemente simétrica e reflexiva, é uma relação de equivalência. Cada classe de equivalência dessa relação será uma *componente conexa por caminhos*.

Definição 8.22 (Conexidade por Caminhos). *Um espaço topológico X é conexo por caminhos quando para quaisquer dois pontos $x, y \in X$, existir um caminho ligando x a y . Dado $x \in X$, a componente conexa por caminhos de x é o conjunto de todos os pontos $y \in X$ tais que existe um caminho ligando x a y .*

Um subconjunto de um espaço topológico é conexo por caminhos quando o for na topologia induzida.

Proposição 8.23. *Em um espaço topológico X , se um conjunto $Y \subset X$ é conexo por caminhos, então é conexo.*

Demonstração. Tome $a \in Y$. Então,

$$Y = \bigcup_{\substack{f: \text{caminho em } Y \\ f(0)=a}} f([0, 1]).$$

Os conjuntos $f([0, 1])$ são conexos por serem imagem do conexo $[0, 1]$ pela aplicação contínua f . Assim, esta é uma união de conjuntos conexos que possuem a como ponto em comum. Pela Proposição 8.12, Y é conexo. \square

Sabemos que um conjunto conexo por caminhos é conexo. Vejamos um exemplo de um espaço conexo que não é conexo por caminhos.

Exemplo 8.24 (Espaço *Pente*). Seja $K = \{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots\}$. Considere os subconjuntos de \mathbb{R}^2

$$P_1 = \{0\} \times (0, 1] \quad \text{e} \quad P_2 = ((0, 1] \times \{0\}) \cup (K \times [0, 1]).$$

O *espaço pente* é o conjunto $P = P_1 \cup P_2$ com a topologia induzida de \mathbb{R}^2 . Veja a Figura 8.1. É fácil ver que P é conexo. De fato, como P_2 é conexo e

$$P_2 \subset P \subset \overline{P_2},$$

P é conexo pela Proposição 8.13. No entanto, P não é conexo por caminhos. A demonstração será feita no Exercício 8.4.10 e também no Exemplo ??.

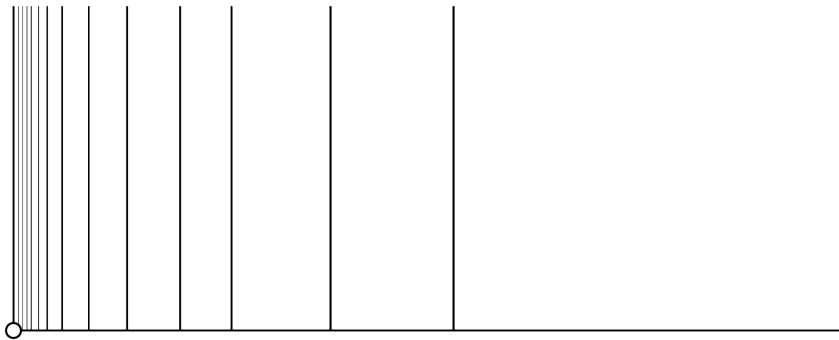


Figura 8.1: Um espaço topológico que é conexo, mas que não é conexo por caminhos.

Uma variação mais simples do *espaço pente*, é o conjunto

$$P' = \{(0, 1)\} \cup P_2.$$

Assim como P , P' também é conexo. Suponha que $f : [0, 1] \rightarrow P'$ seja um caminho em P' , partindo de $p = (0, 1)$. Evidentemente que $F = f^{-1}(p)$ é um fechado de $[0, 1]$. Vamos mostrar que F também é aberto, para concluirmos que f é um caminho constante. Ou seja, que p não pode ser ligado a nenhum outro ponto de P_2 por um caminho em P' . Tome $a \in F$. Seja B_p a bola de raio $\frac{1}{2}$ com centro em p . Como $f^{-1}(B_p)$ é um aberto que contém a , existe um intervalo fechado $I \subset f^{-1}(B_p)$ que é vizinhança de a . Então, $f|_I$ é um caminho em $B_p \cap P'$. Mas todos os caminhos em $B_p \cap P'$ que passam em p são constantes, pois a componente conexa de p em $B_p \cap P'$ é $\{p\}$. Como $a \in F$ é arbitrário, F é aberto.

Exercícios

8.4.1. Dê um exemplo de um espaço topológico X , com um conexo por caminhos $C \subset X$, e um conjunto $D \subset X$ que não é conexo por caminhos, mas que seja tal que

$$C \subset D \subset \overline{C}.$$

8.4.2. Dê um exemplo de um espaço topológico X que não é conexo por caminhos, mas que contém um conjunto denso $C \subset X$ tal que C é conexo por caminhos.

8.4.3. Mostre que a componente conexa de $B_p \cap P'$ do Exemplo 8.24 que contém p é $\{p\}$.

8.4.4. Mostre que a componente conexa por caminhos que contém um ponto a é o maior conjunto conexo por caminhos que contém a .

8.4.5. Por que na demonstração da Proposição 8.21, a continuidade de $(f * g)$ em pontos distintos de $\frac{1}{2}$ é evidente? Seja, por exemplo, $0 \leq t < \frac{1}{2}$. Então, se V é uma vizinhança de $(f * g)(t) = f(2t)$,

$$(f * g)^{-1}(V) \supset \frac{1}{2}f^{-1}(V)$$

é vizinhança de t pela continuidade de f e da aplicação $t \mapsto 2t$. Pode-se fazer o mesmo para $t > \frac{1}{2}$.

8.4.6. Por que o argumento da Proposição 8.21 de fato demonstra que $(f * g)$ é contínua em $\frac{1}{2}$?

8.4.7. Por quê a componente conexa de p em $B_p \cap P'$ é $\{p\}$?

8.4.8. Seja $f : [0, 1] \rightarrow P$ um caminho no *espaço pente* do Exemplo 8.24. Mostre que $f^{-1}(P_2)$ é aberto.

8.4.9. Seja $f : [0, 1] \rightarrow P$ um caminho no *espaço pente* do Exemplo 8.24. Mostre que $f^{-1}(P_1)$ é aberto.

8.4.10. Mostre que o pente P do Exemplo 8.24 não é conexo por caminhos.

8.5 Conexidade Local

As componentes conexas de um espaço topológico são sempre fechadas, mas nem sempre são abertas. Por exemplo, \mathbb{Q} , com a topologia usual (induzida de \mathbb{R}), é tal que suas componentes conexas são os subconjuntos unitários. No entanto, os conjuntos unitários de \mathbb{Q} não são abertos, haja visto que todo aberto de \mathbb{R} contém infinitos racionais. Uma propriedade que garante, por exemplo, que as componentes conexas são abertas, é a *conexidade local*.

Definição 8.25 (Conexidade Local). *Um espaço topológico é localmente conexo quando todo ponto possui uma base de vizinhanças conexas. Se possuir uma base de vizinhanças conexas por caminhos, dizemos que o espaço é localmente conexo por caminhos.*

É evidente que um espaço localmente conexo por caminhos é localmente conexo. No Exemplo 8.17, mostramos que as componentes conexas de um aberto de \mathbb{R} são sempre abertas. A essência da demonstração está no fato de \mathbb{R} , e conseqüentemente os abertos de \mathbb{R} serem espaços localmente conexos. Da mesma forma, o Exemplo 8.3 mostra que as componentes conexas de um aberto de \mathbb{R} são conexas por caminhos. Novamente, a essência da demonstração se encontra no fato de \mathbb{R} ser localmente conexo por caminhos.

Proposição 8.26. *Seja A um aberto conexo de um espaço topológico localmente conexo por caminhos X . Então, A é conexo por caminhos.*

Demonstração. O espaço A , com a topologia induzida, também é localmente conexo por caminhos (por quê?). Portanto, podemos assumir sem perda de generalidade que $A = X$.

Seja C uma componente conexa por caminhos de A . Como A é localmente conexo por caminhos, C é aberto. Ou seja, A é a união disjunta de suas componentes conexas por caminhos, que são conjuntos abertos. Portanto, pela conexidade de A , só pode existir uma componente conexa por caminhos. \square

O *espaço pente* do Exemplo 8.24 é um exemplo de um espaço conexo que não é localmente conexo. Note que se acrescentarmos o ponto $(0, 0)$ ao *espaço pente* do exemplo, teremos um espaço que é conexo por caminhos mas que não é localmente conexo por caminhos.

Exercícios

- 8.5.1.** Mostre que todas as componentes conexas de um espaço localmente conexo são abertas.
- 8.5.2.** Mostre que em um espaço topológico, as componentes conexas serem abertas equivale a dizer que todo ponto possui uma vizinhança conexa.
- 8.5.3.** Mostre que em um espaço topológico localmente conexo por caminhos, as componentes conexas por caminhos são abertas e fechadas.
- 8.5.4.** Mostre que em um espaço topológico X localmente conexo por caminhos, as componentes conexas são exatamente iguais às componentes conexas por caminhos.
- 8.5.5.** A demonstração da Proposição 8.26 poderia ter sido feita de um modo um pouco mais “pedestre”. Poderíamos ter tomado $a \in A$, mostrado que sua componente conexa por caminhos C é aberta, e depois ter tomado $b \in C^c$, e mostrado que existe uma vizinhança V de b , tal que $b \in V \subset C^c$. Para concluirmos que C^c é um aberto. Faça esta demonstração mais detalhadamente e compare com a demonstração da Proposição 8.26.
- 8.5.6.** Considere o conjunto P_2 do Exemplo 8.24. Mostre que $\overline{P_2}$ é conexo, conexo por caminhos, mas não é localmente conexo por caminhos. E P_2 é localmente conexo por caminhos?
- 8.5.7.** Na demonstração da Proposição 8.26, por que podemos afirmar que A é localmente conexo por caminhos?

Compacidade

No Capítulo 8, vimos que conexidade é uma propriedade preservada pelas aplicações contínuas. Assim sabemos, por exemplo, que a imagem de um intervalo por uma aplicação contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é também um intervalo. Neste capítulo, vamos estudar *compacidade*, uma propriedade que também é preservada por aplicações contínuas.

9.1 Definição e Exemplos

Antes de mais nada, precisamos definir o conceito de cobertura e subcobertura.

Definição 9.1 (Cobertura). *Em um espaço topológico (X, τ_X) , dado um conjunto $A \subset X$, uma cobertura (de abertos) de A é uma família $\mathcal{U} \subset \tau_X$, tal que*

$$A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Uma subcobertura de \mathcal{U} é uma subfamília $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ que também é uma cobertura de A . Também dizemos que \mathcal{U} cobre A .

Muitas vezes, utilizamos a expressão *cobertura* de A para designarmos uma família qualquer de subconjuntos de X cuja união contenha A . Neste livro, utilizaremos o adjetivo *aberta* ou a locução *de abertos* apenas quando não for claro pelo contexto se a cobertura é formada por conjuntos abertos ou não. Para uma cobertura que não é formada necessariamente por abertos, diremos “*uma cobertura não necessariamente aberta*”.

Definição 9.2 (Compacidade). *Seja X um espaço topológico. Dizemos que $K \subset X$ é compacto, quando toda cobertura aberta de K admitir uma subcobertura finita. Se X for compacto, então dizemos que X é um espaço topológico compacto.*

Note que $K \subset X$ será compacto se for um espaço topológico compacto quando dotado da topologia induzida.

Vejam alguns exemplos. Primeiro, um exemplo de um conjunto que não é compacto.

Exemplo 9.3 (O intervalo $(0, 1)$). Considere a cobertura de $(0, 1)$ dada por

$$\mathcal{U} = \left\{ \left(\frac{1}{k}, 1 \right) \mid k = 1, 2, \dots \right\}.$$

É evidente que tal cobertura não possui subcobertura finita. Portanto, o espaço $(0, 1)$, com sua topologia usual, não é compacto.

Exemplo 9.4 (Conjunto Finito). Seja X um conjunto finito. Então, X será compacto em qualquer topologia. De fato, todas as coberturas serão finitas. A imagem de X por uma aplicação qualquer $f : X \rightarrow Y$ será sempre finita.

A compacidade é uma propriedade que de certa forma generaliza o Exemplo 9.4.

Exemplo 9.5 (Topologia Discreta). Na topologia discreta, os únicos compactos são os conjuntos finitos. Isso porque qualquer conjunto A é escrito como

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\}.$$

E a cobertura $\{\{x\} \mid x \in A\}$ não possui subcobertura.

Exemplo 9.6 (Topologia Caótica). Seja X um espaço topológico com a topologia $\tau_X = \{\emptyset, X\}$. Então, qualquer subconjunto de X é compacto. De fato, basta que τ_X seja uma família finita para que o argumento funcione.

Exemplo 9.7 (Conjunto Ilimitado). Seja X um espaço métrico. Se X é ilimitado, então X não é compacto. De fato, dado $a \in X$,

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n(a)$$

é uma cobertura sem subcobertura finita. Assim, todo subconjunto compacto de um espaço métrico é limitado. Em particular, \mathbb{R}^n — ou qualquer subconjunto ilimitado de \mathbb{R}^n — não é compacto na topologia usual.

Exercícios

9.1.1. Seja K um conjunto compacto e $F \subset K$ um conjunto fechado. Mostre que F é compacto.

9.1.2. Seja K um conjunto compacto e f uma aplicação contínua. Mostre que $f(K)$ é compacto.

9.1.3. Seja \mathcal{B} uma base para a topologia de X . Mostre que se toda cobertura de $K \subset X$ formada apenas por elementos em \mathcal{B} tiver subcobertura finita, então K é compacto.

9.1.4. Mostre que se $K_1, \dots, K_n \subset X$ são compactos, então $K = K_1 \cup \dots \cup K_n$ também é compacto.

9.1.5. Considere $K \subset Y \subset X$, onde (X, τ_X) é um espaço topológico. Mostre que K é compacto na topologia τ_X se, e somente se K é compacto na topologia induzida $Y \cap \tau_X$.

9.1.6. Mostre que um subconjunto K de um espaço topológico X é compacto se, e somente se, K é um espaço topológico compacto na topologia induzida de X .

9.2 Propriedades Elementares

Vamos estabelecer algumas propriedades elementares e algumas caracterizações de compacidade. A mais importante dessas propriedades é o fato de a imagem de um compacto por uma aplicação contínua também ser um conjunto compacto. A mais simples é o fato de todo fechado dentro de um compacto ser compacto.

Proposição 9.8. *Se $K \subset X$ é compacto e $F \subset K$ é fechado, então F é compacto.*

Demonstração. Seja \mathcal{U} uma cobertura de F . Então, $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cup \{F^c\}$ é uma cobertura de K . Pela compacidade de K , existe uma subcobertura $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ finita. Neste caso, $\mathcal{U}' = \mathcal{V}' \setminus \{F^c\}$ é uma subfamília finita de \mathcal{U} , e cobre F . □

Proposição 9.9. *Sejam X e Y espaços topológicos, $K \subset X$ um compacto e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Então, $f(K)$ é um compacto de Y .*

Demonstração. Seja \mathcal{U} uma cobertura aberta de $f(K)$, então, $f^{-1}(\mathcal{U})$ é uma cobertura aberta de K . Pela compacidade de K , existe uma subfamília finita $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ tal que $f^{-1}(\mathcal{V})$ cobre K . Mas isso implica que \mathcal{V} cobre $f(K)$. Ou seja, $f(K)$ é compacto. □

Exemplo 9.10. Seja X_λ ($\lambda \in \Lambda$) uma família de espaços topológicos não vazios. Então,

$$X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda,$$

com a topologia produto, só pode ser compacto se todos os X_λ forem compactos. De fato, se X é compacto, como as projeções canônicas $\pi_\lambda : X \rightarrow X_\lambda$ são contínuas e sobrejetivas, os espaços $X_\lambda = \pi_\lambda(X)$ são todos compactos. O Teorema 9.41, mais adiante, mostrará que vale a recíproca: se todos os X_λ forem compactos, então X é compacto.

Para verificarmos se um espaço topológico é ou não compacto, a princípio, precisamos verificar que toda cobertura por abertos possui uma subcobertura finita. No entanto, de posse de uma base da topologia, a verificação pode ser restrita a subcoberturas desta base.

Proposição 9.11. *Seja \mathcal{B} uma base de um espaço topológico X . Então, X é compacto se, e somente se, toda cobertura $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ possui subcobertura finita.*

Demonstração. É evidente que a condição é necessária. Vamos mostrar que é suficiente. Seja \mathcal{V} uma cobertura de abertos de X . Cada aberto $V \in \mathcal{V}$ pode ser escrito da forma

$$V = \bigcup_{U \in \mathcal{U}_V} U,$$

para uma família $\mathcal{U}_V \subset \mathcal{B}$ adequada. Por hipótese,

$$\mathcal{U} = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} \mathcal{U}_V$$

possui uma subcobertura finita. Em particular, existem $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{V}$ tais que a família $\mathcal{U}_{V_1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{V_n}$ cobre X . Ou seja, V_1, \dots, V_n é uma subcobertura finita de \mathcal{V} . \square

Vamos ao exemplo mais importante de conjunto compacto.

Exemplo 9.12 (Intervalo Fechado Limitado em \mathbb{R}^n). O conjunto $I = [a, b]$ é compacto na topologia usual induzida de \mathbb{R} . Vamos usar a Proposição 9.11. Primeiramente, note que a família de todos os intervalos abertos forma uma base para a topologia de I . Lembre-se que intervalos da forma $[a, c)$ e $(c, b]$ são abertos na topologia de I .

Seja \mathcal{U} uma cobertura de I formada por intervalos abertos. Seja $J \subset I$ o conjunto de todos os elementos $c \in I$ tais que $[a, c]$ possui uma subcobertura finita de \mathcal{U} . É claro que $a \in J$.

Note que para cada $V \in \mathcal{U}$,

$$V \cap J \neq \emptyset \Leftrightarrow V \subset J.$$

Mas isso implica que tanto J quanto $I \setminus J$ são abertos. Pela conexidade de I , temos que $J = I$.

Em um espaço com base enumerável, podemos caracterizar compacidade em termos de seqüências de abertos.

Corolário 9.13. *Um espaço topológico X com base enumerável é compacto se, e somente se, para toda seqüência crescente de abertos $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ tal que*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X,$$

existir N tal que $A_N = X$.

Demonstração. Tal seqüência A_n é uma cobertura de X . Se X é compacto, existe uma subcobertura finita A_{n_1}, \dots, A_{n_k} . Basta tomar $N = \max\{n_1, \dots, n_k\}$, para ter $A_N = X$.

Por outro lado, se \mathcal{B} é uma base enumerável, e se X não é compacto, existe uma subfamília $\{B_1, B_2, \dots\} \subset \mathcal{B}$ que cobre X , mas que não possui subcobertura finita. Fazendo $A_n = B_1 \cup \dots \cup B_n$, temos uma seqüência crescente de abertos $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ tal que sua união é X , mas todos os A_n são diferentes de X . \square

Proposição 9.14. *Sejam X_1, \dots, X_n espaços topológicos compactos não vazios. Então, com a topologia produto, o espaço $X = X_1 \times \dots \times X_n$ é compacto.*

Demonstração. Basta mostrar para o caso $n = 2$. Seja \mathcal{U} uma cobertura aberta de X . Pela Proposição 9.11, podemos assumir que os abertos em \mathcal{U} são da forma $U \times V$, com U e V abertos de X_1 e X_2 , respectivamente.

Para cada $a \in X_1$, o subespaço $\{a\} \times X_2$ é compacto (veja a Proposição 7.30). Assim, existe uma subfamília $\mathcal{U}_a \subset \mathcal{U}$ que cobre $\{a\} \times X_2$. Note que \mathcal{U}_a é da forma

$$\mathcal{U}_a = \{U_1 \times V_1, \dots, U_m \times V_m\}.$$

Em particular, fazendo $U^a = U_1 \cap \dots \cap U_m$, temos que $U^a \subset X_1$ é aberto e \mathcal{U}_a cobre $U^a \times X_2$.

Como os conjuntos da forma U^a cobrem X_1 , e X_1 é compacto, existem $a_1, \dots, a_k \in X_1$ tais que $X_1 = U^{a_1} \cup \dots \cup U^{a_k}$. Ou seja,

$$\mathcal{U}' = \mathcal{U}_{a_1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{a_k}$$

é uma subfamília finita de \mathcal{U} que cobre X . □

Como os conjuntos fechados são exatamente os complementares dos abertos, a compacidade pode ser facilmente descrita em termos de conjuntos fechados.

Proposição 9.15. *Um espaço topológico é compacto se, e somente se, toda família de fechados \mathcal{F} , com*

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}'} F \neq \emptyset$$

para toda subfamília finita $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$, for tal que

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset.$$

Se o espaço tiver base enumerável, então, toda sequência decrescente de fechados não vazios $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ for tal que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset.$$

Demonstração. A primeira parte é a definição de compacidade escrita em termos de conjuntos fechados. A segunda parte é o Corolário 9.13. □

Exercícios

9.2.1. De um exemplo de uma aplicação contínua $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ilimitada.

9.2.2. Pode existir uma aplicação contínua $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ e uma sequência $x_n \in [0, 1]$ tal que $f(x_n) \rightarrow \infty$?

9.2.3. Por que na demonstração da Proposição 9.11 podemos afirmar que existem $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{V}$ tais que a família $\mathcal{U}_{V_1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{V_n}$ cobre X .

9.2.4. Por que na demonstração da Proposição 9.14 dizemos que basta mostrar para o caso $n = 2$?

9.3 Compacidade nos Reais

Já vimos que os compactos de \mathbb{R} , em sua topologia usual, são limitados. Vamos mostrar que são fechados.

Lema 9.16. *Um subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$, quando \mathbb{R} é dotado de sua topologia usual, é um fechado.*

Demonstração. Suponha que K não é fechado. Então, podemos escolher $x \in \overline{K} \setminus K$. Para todo $k \in K$, tome uma vizinhança aberta de k , V_k , e uma vizinhança aberta de x , U_k , tais que $U_k \cap V_k = \emptyset$. Como $k \in U_k$, é evidente que

$$K \subset \bigcup_{k \in K} U_k.$$

Por outro lado, escolhendo $k_1, \dots, k_n \in K$, e fazendo $U = U_{k_1} \cup \dots \cup U_{k_n}$, temos que $V = V_{k_1} \cap \dots \cap V_{k_n}$ é uma vizinhança de x , com $U \cap V = \emptyset$. Mas como $k \in \overline{K}$, temos que $K \cap V \neq \emptyset$. E portanto, $K \not\subset U$. Ou seja, a cobertura $\{U_k \mid k \in K\}$ não possui subcobertura finita. □

Assim, os compactos de \mathbb{R} , em sua topologia usual, são fechados e limitados. Vamos mostrar que essa propriedade caracteriza os compactos de \mathbb{R} .

Proposição 9.17. *Quando \mathbb{R} é munido de sua topologia usual, um subconjunto $K \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, for fechado e limitado.*

Demonstração. Pelo Exemplo 9.7 e pelo Lema 9.16, se K é compacto, então, é fechado e limitado. Por outro lado, se K é fechado e limitado, então, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $K \subset [-M, M]$, e este último é compacto pelo Exemplo 9.12. Assim, a Proposição 9.8 garante que K é compacto. □

A proposição a seguir é de extrema importância e é muito utilizada.

Proposição 9.18. *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida num compacto X . Então, existe $x \in X$ tal que $f(x) = \sup f(X)$.*

Demonstração. Sabemos que $f(X)$ é um compacto de \mathbb{R} . Se não existir um tal $x \in X$, então,

$$f(X) \subset (-\infty, \sup f(X)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, \sup f(X) - \frac{1}{n} \right).$$

Pela compacidade de $f(X)$, existe n tal que

$$f(X) \subset \left(-\infty, \sup f(X) - \frac{1}{n} \right),$$

o que, pela definição de $\sup f(X)$, é impossível. \square

Outras propriedades importantes da topologia usual dos números reais são na verdade propriedades gerais dos espaços métricos e serão vistas em breve.

Exercícios

9.3.1. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, pode existir um conjunto limitado $M \subset \mathbb{R}$ tal que $f(M)$ é ilimitado? Justifique ou dê um exemplo.

9.3.2. Seja

$$f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R} . \\ x \mapsto \frac{1}{x}$$

Existe $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $f = g|_{(0,1)}$?

9.3.3. Considere o conjunto dos racionais \mathbb{Q} com a topologia induzida dos reais. O que você pode dizer sobre os subconjuntos compactos de \mathbb{Q} ?

9.3.4. Descubra o que é um *Espaço de Hausdorff* e mostre, como no Lema 9.16, que nos *Espaços de Hausdorff* os conjuntos compactos são fechados.

9.3.5. Considere \mathbb{R} com a topologia $\tau = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Quais são os conjuntos compactos?

9.3.6. Considere a topologia em \mathbb{R} dada pelo Exercício 9.3.5. Mostre que uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida em um espaço topológico compacto X não vazio sempre atinge o máximo, mas pode não atingir o mínimo.

9.3.7. Considere \mathbb{R} com a topologia τ gerada pela família $\{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Quando é que $x_n \xrightarrow{\tau} x$ nessa topologia? (Usualmente denotamos essa convergência por $x_n \rightarrow x^+$.)

9.3.8. Mostre que a topologia τ do Exercício 9.3.7 é mais forte que a topologia usual dos reais.

9.4 Compacidade em \mathbb{R}^n

Assim como no caso dos reais, se \mathbb{R}^n é dotado da topologia produto (sua topologia usual), $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, é fechado e limitado. Se usarmos a compacidade de $[-M, M]^n$ no lugar da compacidade de $[-M, M]$, a demonstração é exatamente a mesma.

Teorema 9.19. *Quando \mathbb{R}^n é munido de sua topologia usual, um subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, for fechado e limitado.*

Demonstração. Faça exatamente como na Proposição 9.17, usando a compacidade de $[-M, M]^n$ no lugar da compacidade de $[-M, M]$. A compacidade de $[-M, M]^n$ é consequência da Proposição 9.14. \square

Outras propriedades que vamos investigar referentes a compacidade em \mathbb{R}^n , são na verdade propriedades gerais dos espaços métricos. Sendo assim, vamos encerrar esta seção e dar prosseguimento ao estudo da compacidade em espaços métricos.

Exercícios

9.4.1. Mostre que se $K \subset \mathbb{R}^2$ é um compacto na topologia usual, então existem $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}$, compactos na topologia usual tais que $K \subset K_1 \times K_2$.

9.4.2. Na topologia usual, existe algum aberto de \mathbb{R}^n que seja compacto?

9.5 Compacidade em Espaços Métricos

A topologia dos espaços métricos pode ser descrita em termos de convergência de seqüências. Dois conceitos simplificam o elo entre compacidade e convergência de seqüências: *completude* e *limitação total*.

Definição 9.20 (Seqüência de Cauchy e Completude). *Em um espaço métrico (X, d) , dizemos que uma seqüência $x_n \in X$ é uma seqüência de Cauchy quando para todo $\varepsilon > 0$ existir $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$m, n \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq \varepsilon.$$

Dizemos que X é completo quando toda seqüência de Cauchy x_n convergir para algum $x \in X$.

Seqüências convergentes são sempre de Cauchy. Assim, um espaço métrico é completo quando as seqüências forem convergentes se, e somente se, forem de Cauchy. De certa forma, as seqüências de Cauchy podem ser entendidas como seqüências que “deveriam convergir”, e que se não convergem, é porque em um certo sentido o suposto ponto de convergência está faltando. Ou seja, se a seqüência de Cauchy não converge é porque o espaço é incompleto.

Exemplo 9.21. Com a métrica usual, conjunto $(0, 1]$ não é completo. O ponto que “falta” seria justamente o 0.

Não vamos discutir propriedades dos espaços métricos além do necessário para discutir questões topológicas. A completude de um espaço topológico não é uma propriedade topológica. Duas métricas d e r em um mesmo conjunto X podem ser compatíveis (induzem a mesma topologia) e serem tais que (X, d) é completo, (X, r) é incompleto.

Exemplo 9.22. O conjunto $(0, 1]$ é homeomorfo a $[1, \infty)$. Ou seja, podemos colocar em $(0, 1]$ a métrica Euclideana, e obtermos um espaço incompleto, mas também podemos transportar para $(0, 1]$, através do homeomorfismo $x \mapsto \frac{1}{x}$, a métrica Euclideana de $[1, \infty)$. Em outras palavras, $(0, 1]$ é completo com a métrica

$$d(x, y) = \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right|.$$

Em nossa discussão sobre compacidade, a propriedade mais importante das seqüências de Cauchy é dada pelo seguinte Lema.

Lema 9.23. *Seja (X, d) um espaço métrico. E seja x_n uma seqüência de Cauchy tal que existe uma subseqüência x_{n_k} que converge para x . Então, x_n converge para x .*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Então, existe N tal que

$$n, m \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2},$$

e $n_k \geq N$ tal que $d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Assim, substituindo m por n_k , temos que

$$\begin{aligned} n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) &\leq d(x_{n_k}, x) + d(x_n, x_{n_k}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Definição 9.24 (Limitação Total). *Um espaço métrico (X, d) é totalmente limitado quando, dado $\varepsilon > 0$, existirem finitas bolas $B_\varepsilon(x_1), \dots, B_\varepsilon(x_n)$ com*

$$X = \bigcup_{j=1}^n B_\varepsilon(x_j).$$

Dizer que um espaço métrico é totalmente limitado, é o mesmo que dizer que toda sequência possui uma subsequência de Cauchy.

Lema 9.25. *Um espaço métrico (X, d) é totalmente limitado se, e somente se, toda sequência possui uma subsequência de Cauchy.*

Demonstração. Suponha que X seja totalmente limitado. Para uma sequência arbitrária x_n , vamos escolher uma subsequência de Cauchy. Faça $X_0 = X$. Para cada $k = 1, 2, \dots$, X_{k-1} pode ser coberto por uma quantidade finita de bolas de raio $\frac{1}{k}$. Seja B_k a bola tal que $X_{k-1} \cap B_k$ contém infinitos termos da sequência original. Faça $X_k = X_{k-1} \cap B_k$, e escolha n_k (maior que n_{k-1}) tal que $x_{n_k} \in X_k$. Esta é uma subsequência de Cauchy. De fato, para $k, j \geq N$, como X_k e X_j tem diâmetro menor ou igual a $\frac{1}{N}$, temos que

$$d(x_{n_k}, x_{n_j}) \leq \frac{2}{N}.$$

Por outro lado, se X não é totalmente limitado, então, existe $\varepsilon > 0$ tal que nenhuma cobertura de X por bolas de raio ε é finita. Sendo assim, escolha $x_1 \in X$, e escolhido x_n , escolha

$$x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{j=1}^n B_\varepsilon(x_j).$$

Para esta sequência, quando $j \neq k$, $d(x_j, x_k) \geq \varepsilon$. Para esta sequência, nenhuma subsequência é de Cauchy. □

Um fato simples sobre espaços (métricos) totalmente limitados é que eles possuem uma base enumerável.

Lema 9.26. *Todo espaço métrico (X, d) totalmente limitado possui uma base enumerável.*

Demonstração. Pela Proposição 5.26, basta mostrar que existe um subconjunto enumerável denso. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, existe um conjunto finito $S_n \subset X$ tal que

$$X = \bigcup_{x \in S_n} B_{\frac{1}{n}}(x).$$

Neste caso,

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$$

é um enumerável denso. De fato, se $A \subset X$ é aberto, então A contém uma bola $B_{\frac{1}{n}}(a)$. Pela definição de S_n , existe $s \in S_n$ tal que $a \in B_{\frac{1}{n}}(s)$. Mas isso significa que $s \in B_{\frac{1}{n}}(a) \subset A$. □

Em espaços com base enumerável, a compacidade é mais fácil de ser caracterizada.

Lema 9.27. *Se X é um espaço topológico com uma base \mathcal{B} enumerável, então, são equivalentes:*

1. X não é compacto.
2. Existe uma cobertura aberta enumerável de X sem subcobertura finita.
3. Existe uma sequência de abertos

$$U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \dots,$$

$$\text{com } X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Demonstração. ■ (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)

Estas implicações são evidentes.

■ (1) \Rightarrow (3)

Este é o conteúdo do Corolário 9.13. □

Agora podemos caracterizar os espaços métricos compactos em termos de convergência de seqüências. Note que os lemas anteriores implicam que um espaço métrico é completo e totalmente limitado se, e somente se, toda seqüência possuir uma subsequência convergente.

Proposição 9.28. *Seja (X, d) um espaço métrico. Então, as seguintes afirmações são equivalentes.*

1. X é compacto.
2. Toda seqüência $x_n \in X$ tem uma subsequência convergente.
3. X é completo e totalmente limitado.

Demonstração. Já vimos que os itens (2) e (3) são equivalentes, mas mesmo assim, vamos formalizar aqui a demonstração.

■ (2) \Leftrightarrow (3)

Se x_n é uma seqüência, e X é totalmente limitado, então, pelo Lema 9.25, x_n possui uma subsequência de Cauchy. Mas se X também é completo, essa subsequência é convergente.

Por outro lado, se X não é completo, então, existe uma seqüência de Cauchy x_n que não converge. Pelo Lema 9.23, x_n não possui subsequência convergente. E se X não é totalmente limitado, o Lema 9.25 implica que existe uma seqüência x_n sem subsequência de Cauchy. Em particular, x_n não possui subsequência convergente, já que toda seqüência convergente é de Cauchy.

■ (1) \Rightarrow (2)

Suponha que X é compacto. Seja

$$F_N = \overline{\{x_n \mid n \geq N\}}.$$

Os conjuntos F_N formam uma seqüência decrescente de fechados não vazios. Pela compacidade de X , sabemos que o limite $F = \bigcap_{N=1}^{\infty} F_N$ não pode ser vazio. Portanto, existe $x \in F$. Agora, para cada $k = 1, 2, \dots$, escolha $n_k \rightarrow \infty$ tal que $x_{n_k} \in B_{\frac{1}{k}}(x)$. Então, a seqüência x_{n_k} é uma subsequência de x_n que converge para x .

■ (2) e (3) \Rightarrow (1)

Se X é totalmente limitado, então, pelo Lema 9.26, X tem base enumerável. Neste caso, se X não é compacto, pelo Lema 9.27, existe uma seqüência de abertos $U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \dots$, tais que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$.

Escolha $x_n \in U_{n+1} \setminus U_n$. Para qualquer $x \in X$, existe N tal que $x \in U_N$. Portanto, para $n \geq N$, $x_n \notin U_N$. Ou seja, nenhuma subsequência de x_n pode convergir para x . Como $x \in X$ é arbitrário, nenhuma subsequência de x_n converge. \square

Exercícios

9.5.1. Em um espaço métrico, toda seqüência convergente é de Cauchy.

9.5.2. Mostre que

$$d_1(x, y) = |y - x| \quad \text{e} \quad d_2(x, y) = \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right|$$

induzem a mesma topologia em $(0, 1]$.

9.5.3. O que está errado na seguinte frase?

Seja X um espaço topológico completo?

9.5.4. Sejam S_n os conjuntos do Lema 9.26. Considere as famílias

$$\mathcal{S}_n = \left\{ B_{\frac{1}{n}}(x) \mid x \in S_n \right\}.$$

Mostre que de fato,

$$\mathcal{S} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$$

é uma base da topologia.

9.5.5. Na demonstração da Proposição 9.28, usamos o seguinte passo:

Agora, para cada $k = 1, 2, \dots$, escolha $n_k \rightarrow \infty$ tal que $x_{n_k} \in B_{\frac{1}{k}}(x)$.

Por que sabemos que existe tal k ?

9.5.6. Na demonstração da Proposição 9.28, usamos o seguinte passo:

Agora, para cada $k = 1, 2, \dots$, escolha $n_k \rightarrow \infty$ tal que $x_{n_k} \in B_{\frac{1}{k}}(x)$.

Por que é importante que $n_k \rightarrow \infty$?

9.5.7. Mostre que se X é compacto e todo ponto tem uma base enumerável de vizinhanças, então toda sequência tem subsequência convergente.

9.5.8. Na resolução do Exercício 9.5.7, quais passos não funcionariam se não houvesse a hipótese de cada ponto de X ter uma base enumerável de vizinhanças?

9.5.9. Procure (internet?) uma exemplo de um espaço compacto tal que nem toda sequência tem subsequência enumerável.

9.6 Espaços de Hausdorff

Os espaços métricos possuem propriedades que nem sempre estão presentes nos espaços topológicos em geral. Uma dessas propriedades é a Proposição 1.6, que diz que dois pontos distintos podem ser separados por bolas disjuntas. Foi esta propriedade que nos permitiu mostrar que os subconjuntos compactos de \mathbb{R} com sua topologia usual são fechados (Lema 9.16). Da mesma forma, a Proposição 1.6 pode ser usada para demonstrar que em um espaço métrico, os subconjuntos compactos são sempre fechados.

Definição 9.29 (Espaço de Hausdorff). *Um espaço (topológico) de Hausdorff é um espaço topológico X tal que para todos os elementos $a, b \in X$ distintos, existem $U \in \mathcal{V}(a)$ e $V \in \mathcal{V}(b)$ com $U \cap V = \emptyset$. Também dizemos que X é de Hausdorff, ou simplesmente que X é Hausdorff.*

A Definição 9.29 poderia ter sido feita com U e V abertos. A demonstração e o enunciado precisos deste fato ficam como exercício.

O axioma da Definição 9.29 garante que de uma certa forma, dois pontos distintos a e b podem ser separados por vizinhanças. Esse tipo de axioma é chamado de *axioma de separação*. Veremos outros tipos de axioma de separação no Capítulo ???. Veja também o Exercício 9.6.1.

Os espaços métricos são espaços de Hausdorff. Talvez por isso, os espaços que não são de Hausdorff fujam um pouco à nossa intuição. Quando um espaço é de Hausdorff, em certos casos podemos tratá-lo como se fosse um espaço métrico. Ao invés de dizermos

Tome $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \frac{1}{2}d(a, b)$.

podemos simplesmente dizer

Tome vizinhanças disjuntas de a e b .

Mesmo argumentos com espaços métricos ficam mais elegantes se evitarmos escolher ε para ao invés disso, utilizarmos a Proposição 1.6. Por outro lado, nem todos os espaços topológicos são de Hausdorff. Ao identificarmos que um espaço não é de Hausdorff, sabemos que existem certas propriedades que este espaço pode ter, mas que fogem à nossa intuição.

Exemplo 9.30. O conjunto dos números reais, com sua topologia usual, é um espaço de Hausdorff. De fato, pela Proposição 1.6, qualquer espaço métrico é um espaço de Hausdorff.

Exemplo 9.31 (Topologia caótica). Seja X um conjunto com mais de um elemento. Então, dotado da topologia caótica $\{X, \emptyset\}$, X não é de Hausdorff. Note que na topologia caótica, todos os subconjuntos de X são compactos, mas os fechados são apenas X e \emptyset .

Exemplo 9.32 (Convergência pontual). Dados os conjuntos X e o espaço topológico Y , se Y é de Hausdorff, então, o conjunto das funções $f : X \rightarrow Y$ com a topologia da convergência pontual (Exemplo 7.32) é de Hausdorff. Isso porquê, se duas funções f e g são distintas, então existe $x \in X$ tal que $f(x) \neq g(x)$. Tome duas vizinhanças disjuntas U e V de $f(x)$ e $g(x)$, e perceba que os conjuntos $\pi_x^{-1}(U)$ e $\pi_x^{-1}(V)$ são vizinhanças disjuntas de f e g .

Assim como no caso dos espaços métricos, os subconjuntos compactos de um espaço de Hausdorff são sempre fechados.

Proposição 9.33. *Se X é um espaço de Hausdorff, então todo subconjunto compacto é fechado. Se X é compacto Hausdorff, então, os subconjuntos de X que são compactos são exatamente os subconjuntos fechados.*

Demonstração. A demonstração da primeira parte é idêntica à demonstração do Lema 9.16. Suponha que $K \subset X$ é compacto. Tome $a \notin K$. Vamos mostrar que $a \notin \overline{K}$. Para cada $k \in K$, existem vizinhanças abertas e disjuntas U_k e V_k de k e a . Note que

$$K \subset \bigcup_{k \in K} U_k$$

é uma cobertura aberta de K . Pela compacidade de K , existem k_1, \dots, k_n tais que,

$$K \subset U_{k_1} \cup \dots \cup U_{k_n}.$$

Faça $U = U_{k_1} \cup \dots \cup U_{k_n}$ e $V = V_{k_1} \cap \dots \cap V_{k_n}$. Então, V é uma vizinhança de a , tal que

$$V \cap K \subset V \cap U = \emptyset.$$

E portanto, $a \notin \overline{K}$. Assim, concluímos que K é fechado.

A última afirmação é evidente. □

Rigidez Compacto Hausdorff

Se um espaço topológico (X, τ_X) for Hausdorff, então qualquer topologia em X que seja mais forte que τ_X também será de Hausdorff. Por outro lado, se o espaço é compacto, então continuará sendo compacto mesmo com uma topologia mais fraca. Assim, se (X, τ_X) é compacto Hausdorff, então, não existe uma topologia $\tau_c \subsetneq \tau_X$ que seja de Hausdorff, pois tomando $A \in \tau_X \setminus \tau_c$, teríamos um compacto A^c em τ_c que não é fechado. E por outro lado, não existe uma topologia $\tau_h \supsetneq \tau_X$ onde X seja compacto, pois neste caso, tomando $A \in \tau_h \setminus \tau_X$, teríamos um fechado A^c que não é compacto. Esta é a rigidez dos espaços que são compacto Hausdorff.

Proposição 9.34. *Seja X um espaço topológico compacto, e Y um espaço de Hausdorff. Se $f : X \rightarrow Y$ é uma bijeção contínua, então f é um homeomorfismo.*

Demonstração. É suficiente mostrar que f é uma aplicação fechada. Seja $F \subset X$ um fechado. Pela compacidade de X , F é compacto. Por ser imagem de um compacto por uma aplicação contínua, $f(F)$ é um compacto de Y . Mas como Y é de Hausdorff, $f(F)$ é fechado. □

Exemplo 9.35. Seja X um espaço topológico compacto Hausdorff, Y um espaço topológico qualquer e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação qualquer. Considere o gráfico de f

$$\text{Gr}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}.$$

Então,

$$f \text{ é contínua} \Leftrightarrow \text{Gr}(f) \text{ é compacto.}$$

De fato, note que o gráfico de f é a imagem da função

$$g := (\text{id}, f) : \begin{array}{ccc} X & \rightarrow & X \times Y \\ x & \mapsto & (x, f(x)) \end{array}.$$

Se f é contínua, g é contínua, e a imagem do compacto X por g é um conjunto compacto.

Por outro lado, considere a projeção contínua de $X \times Y$ na primeira (π_x) e na segunda (π_y) coordenadas. Ambas são contínuas pela definição da topologia de $X \times Y$. $\pi_x|_{\text{Gr}(f)} : \text{Gr}(f) \rightarrow X$ é uma bijeção contínua do compacto X no espaço de Hausdorff $\text{Gr}(f)$. Pela Proposição 9.34, π_x^{-1} é contínua. Portanto, $f = \pi_y \circ \pi_x^{-1}$ é contínua.

Unicidade da Convergência

Em um espaço topológico X , pode acontecer de uma mesma sequência x_n convergir para dois pontos de X distintos. Nos espaços de Hausdorff, isso não acontece. Apesar de a recíproca não ser verdadeira, ou seja, existirem espaços que não são de Hausdorff, mas que os limites das sequências convergentes são únicos, veremos que ao substituir sequências por redes, no Capítulo ??, os espaços de Hausdorff são exatamente aqueles que os limites das redes convergentes são únicos.

Proposição 9.36. *Seja X um espaço de Hausdorff, e $x_n \in X$ uma sequência tal que $x_n \rightarrow x \in X$ e $x_n \rightarrow y \in X$. Então, $x = y$.*

Demonstração. Se $x \neq y$, então existem vizinhanças de x e y disjuntas, U e V . Como $x_n \rightarrow x$, temos que a partir de um certo N , todos os x_n estão em U . Mas nenhum deles pode estar em V , pois U e V são disjuntos. Isso contraria o fato de x_n convergir para y . \square

A seguir, um exemplo de um espaço que não é de Hausdorff, mas que os limites de todas as sequências são únicos.

Exemplo 9.37 (Topologia coenumerável). Seja X um conjunto não enumerável, e τ a topologia coenumerável. Ou seja,

$$\tau = \{A \subset X \mid A^c \text{ é enumerável}\} \cup \{\emptyset\}.$$

As sequências convergentes de X , são aquelas que a partir de um certo N se tornam constantes. Evidentemente que uma tal sequência não pode ter dois limites distintos. No entanto, como X não é enumerável, dois abertos de X nunca são disjuntos.

Exercícios

9.6.1. Se X é um espaço de Hausdorff e $x \in X$, então o conjunto $\{x\}$ é fechado.

9.6.2. Dê um exemplo de um espaço topológico X onde haja um $x \in X$ tal que $\{x\}$ não é fechado.

9.6.3. Se X é Hausdorff e $x \in X$, então

$$\{x\} = \bigcap \mathcal{V}(x).$$

9.6.4. Se X é Hausdorff e todo $x \in X$ tem base finita, então, X é discreto.

9.6.5. Se X é Hausdorff e $x \in X$, então

$$\{x\} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}(x)} \bar{V}.$$

9.6.6. Dê uma definição para espaços de Hausdorff, alternativa à Definição 9.29, mas que utilize abertos ao invés de vizinhanças. Demonstre que as duas definições são equivalentes.

9.6.7. Use a Proposição 9.34 para mostrar que se $\tau_h \subset \tau_c$ são topologias em X , com τ_h Hausdorff e τ_c compacta, então $\tau_h = \tau_c$.

9.6.8. Considere o espaço $X = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ com a métrica

$$d(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |y_n - x_n|.$$

Mostre que esse espaço não é compacto.

9.6.9. Em um espaço topológico X , dado $x \in X$, $\{x\}$ é fechado se, e somente se, para todo $y \in X$ diferente de x existe $V \in \mathcal{V}(y)$ tal que $x \notin V$.

9.6.10. Dê um exemplo de um espaço topológico X onde existem dois pontos $x, y \in X$ tais que

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow x_n \rightarrow y,$$

mas que $x_n \rightarrow y$ não implica que $x_n \rightarrow x$.

9.7 Compacidade com Sub-Bases

É bastante claro que, ao verificarmos a compacidade de um espaço, é suficiente verificarmos as coberturas formadas por elementos de uma base fixada. Isso porque, toda cobertura de abertos \mathcal{U} pode ser “refinada” por uma cobertura formada apenas por elementos da base da topologia (veja a Proposição 9.11). É um fato surpreendente (ao menos para o autor), que para verificar a compacidade de um espaço, é suficiente verificar a existência de subcoberturas finitas para coberturas formadas por elementos de uma sub-base. Este é o conteúdo do teorema a seguir. Vamos demonstrar de duas formas. A primeira utiliza *indução transfinita* e o *Princípio da Boa Ordenação*. A segunda demonstração utiliza o *Lema de Zorn*. Antes, vamos precisar de um Lema. Material sobre esses assuntos pode ser encontrado no Apêndice ??.

Lema 9.38. *Seja \mathcal{S} uma sub-base para a topologia de X , e seja \mathcal{B} a base gerada por \mathcal{S} . Se $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}$ é uma cobertura sem subcobertura finita, e $\emptyset \neq V \in \mathcal{V}$, então, podemos adicionar a \mathcal{V} , um conjunto $S_V \in \mathcal{S}$ com $S_V \supset V$, de modo que a família*

$$\mathcal{V}' = \mathcal{V} \cup \{S_V\}$$

também não possui subcobertura finita.

Demonstração. Sabemos que $V \neq X$. Escreva $V = V_1 \cap \dots \cap V_n$, com $V_j \in \mathcal{S}$. Para $j = 1, \dots, n$, faça

$$\mathcal{V}_j = \mathcal{V} \cup \{V_j\}.$$

Se todas as coberturas \mathcal{V}_j tivessem subcobertura finita, \mathcal{V} também teria (por quê?). Portanto, fazendo $S_V = V_j$ para algum j tal que \mathcal{V}_j não tem subcobertura finita, temos a família \mathcal{V}' satisfazendo a condição desejada. \square

Teorema 9.39 (Teorema de Sub-Base de Alexander). *Seja \mathcal{S} uma sub-base para a topologia do espaço X . Então, X é compacto se, e somente se, toda cobertura $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$ possuir uma subcobertura finita.*

(*Demonstração utilizando o princípio da boa ordenação*). É evidente que a condição é necessária. Vamos mostrar que se um espaço não é compacto, então existe uma cobertura formada por elementos da sub-base, mas que não possui subcobertura finita. Fica como exercício mostrar que se \mathcal{S} não cobre X , então X é compacto. Portanto, podemos assumir que \mathcal{S} cobre X . Seja \mathcal{B} a base gerada por \mathcal{S} . Como X não é compacto, existe uma família $\mathcal{U}' \subset \mathcal{B}$ que cobre X e que não possui subcobertura finita.

Seja \prec uma boa ordem em \mathcal{U}' . Vamos utilizar a seguinte notação. Defina

$$\mathcal{U}_U^* = \{S_W \mid W \not\prec U\} \cup \mathcal{U}'$$

e

$$\mathcal{U}_U = \{S_W \mid W \prec U\} \cup \mathcal{U}'.$$

Definidos $S_W \in \mathcal{S}$ para todo $W \not\prec U$ tal que \mathcal{U}_W não possui subcobertura finita, então \mathcal{U}_U^* também não tem subcobertura finita. De fato, se U é o primeiro elemento de \mathcal{U} , $\mathcal{U}_U^* = \mathcal{U}$ não tem subcobertura finita por hipótese. Caso contrário, uma subcobertura finita de \mathcal{U}_U^* estaria toda contida em \mathcal{U}_W para algum $W \prec U$, mas \mathcal{U}_W não tem subcobertura finita.

O Lema 9.38 implica que existe $S_U \in \mathcal{S}$, com $S_U \supset U$, tal que \mathcal{U}_U é uma cobertura sem subcobertura finita. Por indução transfinita, para todo $U \in \mathcal{U}'$, \mathcal{U}_U é uma cobertura sem subcobertura finita. Mas isso implica que $\mathcal{U} = \{S_U \mid U \in \mathcal{U}'\}$ é uma cobertura, pois $S_U \supset U$, mas sem subcobertura finita. De fato, se \mathcal{U} tivesse subcobertura finita S_1, \dots, S_n , então existiria $U \in \mathcal{U}'$ tal que $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{U}_U$, contrariando o fato de \mathcal{U}_U não possuir subcobertura finita. Como $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$, a proposição fica demonstrada. \square

Vamos demonstrar o mesmo fato usando o *Lema de Zorn*. É um bom exercício comparar as duas demonstrações.

(*Demonstração utilizando o lema de Zorn*). Denotando por \mathcal{B} a base gerada por \mathcal{S} , basta mostrar que quando X não é compacto, existe uma cobertura $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$ sem subcobertura finita. O conjunto Γ das subfamílias de \mathcal{B} sem subcobertura finita não é vazio, pois X não é compacto. Ordenando as subfamílias de \mathcal{B} por inclusão, se $\mathcal{U}_\lambda \in \Gamma$ ($\lambda \in \Lambda$) é uma cadeia de subcoberturas sem subcobertura finita, então, utilizando o mesmo argumento da demonstração por indução transfinita, concluímos que

$$\mathcal{U}^* = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{U}_\lambda$$

é uma cobertura sem subcobertura finita, pois se \mathcal{U}^* tivesse subcobertura finita, essa subcobertura estaria contida em \mathcal{U}_λ para algum $\lambda \in \Lambda$. Assim, Γ é indutivamente ordenado, e por isso possui um elemento maximal \mathcal{U}_m .

Pelo Lema 9.38, assim como na demonstração utilizando indução transfinita, vemos que se $U = U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{U}_m$, com $U_j \in \mathcal{S}$, então existe $S_U \in \mathcal{U}'$, com $S_U \supset U$, tal que $\mathcal{U}_m \cup \{S_U\}$ não possui subcobertura finita. Pela maximalidade de \mathcal{U}_m , temos que $S_U \in \mathcal{U}_m$. Mas isso implica que $\mathcal{U} = \mathcal{U}_m \cap \mathcal{S}$ cobre X (por quê?). E como \mathcal{U}_m não tem subcobertura finita, $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_m$ também não tem, concluindo a demonstração. \square

Um exemplo interessante de aplicação do Teorema de Alexander é a compacidade dos intervalos $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Exemplo 9.40 (Compacidade com sub-base em \mathbb{R}). Uma sub-base para a topologia usual de \mathbb{R} é a família

$$\mathcal{S} = \{(-\infty, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, \infty) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Suponha que $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$ seja uma cobertura de $[a, b]$. Se os conjuntos da forma $(-\infty, x)$ de \mathcal{U} cobrem $[a, b]$, então existe $x > b$, com $(-\infty, x) \in \mathcal{U}$. O mesmo argumento vale se os conjuntos da forma (x, ∞) de \mathcal{U} cobrirem $[a, b]$. Caso contrário, tomando como B o supremo dos $x \in \mathbb{R}$ tais que $(-\infty, x) \in \mathcal{U}$, e A o ínfimo dos $x \in \mathbb{R}$ tais que $(x, \infty) \in \mathcal{U}$, é fácil ver que $A < B$. Ou seja, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, com $A < \alpha < \beta < B$ tais que $(-\infty, \beta), (\alpha, \infty) \in \mathcal{U}$. Assim,

$$[a, b] \subset \mathbb{R} = (-\infty, \beta) \cup (\alpha, \infty).$$

Pelo Teorema 9.39, $[a, b]$ é compacto.

Exercícios

9.7.1. Na demonstração do Lema 9.38, como sabemos que $V \neq X$?

9.7.2. Por que nos preocupamos em observar que $V \neq X$ na demonstração do Lema 9.38?

9.7.3. Mostre que na demonstração do Lema 9.38, se todas as famílias \mathcal{V}_j tivessem subcobertura finita, então \mathcal{V} também teria.

9.7.4. O que daria errado na demonstração do Exemplo 9.40 se substituíssemos $[a, b]$ por $[a, b)$?

9.8 Produto de Compactos

Como prometido, vamos mostrar que o produto de espaços compactos é compacto na topologia produto. Mesmo que seja o produto de infinitos, e até mesmo incontáveis espaços.

Teorema 9.41. *Seja X_λ ($\lambda \in \Lambda$) uma família qualquer de espaços topológicos. Neste caso, o espaço*

$$X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

é compacto na topologia produto se, e somente se, todos os X_λ forem compactos.

Demonstração. Se X é compacto, então, como cada X_λ é a imagem do compacto X pela projeção contínua π_λ , X_λ é compacto. Vamos utilizar o *Teorema de Sub-Base de Alexander* (Teorema 9.39) para mostrar a implicação inversa. Suponha que cada X_λ é compacto. Seja

$$\mathcal{S}_\lambda = \{\pi_\lambda^{-1}(U) \mid U \in \tau_\lambda\}.$$

A topologia produto é gerada pela família

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{S}_\lambda.$$

Seja $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$ uma cobertura de X . Se nenhuma das subfamílias $\mathcal{U}_\lambda = \mathcal{U} \cap \mathcal{S}_\lambda$ cobrir X , então podemos escolher para cada λ , $x_\lambda \in X_\lambda$ tal que $\pi_\lambda^{-1}(x_\lambda)$ não é coberto por \mathcal{U}_λ . Assim, o conjunto

$$Y = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \pi_\lambda^{-1}(x_\lambda)$$

contém o elemento $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, mas não intersecta nenhum elemento de \mathcal{U}_λ , para nenhum $\lambda \in \Lambda$. Ou seja, Y não intersecta nenhum elemento de \mathcal{U} . E isso contraria o fato de \mathcal{U} ser uma cobertura de X . Portanto, existe um λ tal que \mathcal{U}_λ cobre X . Pela compacidade de X_λ , existe uma subfamília finita $\pi_\lambda^{-1}(U_1), \dots, \pi_\lambda^{-1}(U_n) \in \mathcal{U}_\lambda$, tal que U_1, \dots, U_n cobre X_λ (por quê?). Ou seja, esta família cobre X . Pelo Teorema 9.39, X é compacto. \square

Exemplo 9.42 (Representação binária). Na topologia produto, o espaço $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ é compacto. Pelo Exemplo 7.31, o conjunto $[0, 1]$, como imagem da representação binária (ou decimal) por uma aplicação contínua, também é compacto.

Exemplo 9.43 (Convergência ponto a ponto). Considere o conjunto das funções $f : X \rightarrow [-M, M]$, para algum $M \in \mathbb{R}$ fixado. Na topologia da convergência ponto a ponto, ou seja, na topologia produto, quando identificamos com $[-M, M]^X$, o espaço das funções é compacto.

Mais a frente, veremos que o famoso *Teorema de Banach-Alaoglu*, estudado em *análise funcional*, consiste em identificar o espaço estudado com um subconjunto fechado do espaço compacto deste exemplo.

Exercícios

9.8.1. Use um argumento com compacidade para mostrar que a topologia produto em $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ não é discreta.

Dicas e Respostas dos Exercícios

Dicas

- 3.1.1** Tome bolas de raios cada vez menores.
- 3.1.2** Faça exatamente como no exercício 3.1.1.
- 3.1.3** Use o fato de que as bolas são vizinhanças de todos os seus pontos.
- 3.1.5** Use o exercício 3.1.1 para escolher n_k e m_k de modo que para qualquer $V \in \mathcal{V}(x)$, $x_{n_k}^{m_k}$ esteja em V para k suficientemente grande.
- 5.2.1** $\tau = \tau(\tau_i, \tau_s)$.
- 5.2.2** Quais elementos da base induzida por \mathcal{S} contém x ?
- 5.2.3** Faça como na Proposição 4.16.
- 5.2.4** $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Então, use o Exercício 5.2.3.
- 5.3.1** Mostre que para todo $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}(x)$ é uma base de vizinhanças para x .
- 5.3.2** Veja o Corolário 5.16.
- 5.4.3** Tem???
- 7.1.1** É só verificar os axiomas da Definição 4.1.
- 7.1.2** Tome Z unitário.
- 7.2.1** Qual é a mais forte?
- 7.2.2** Qual é a mais fraca?
- 7.2.3** Se f_λ é contínua em τ , então $\tau_{f_\lambda} \subset \tau$.
- 7.2.4** Primeiramente, τ é uma topologia. Em segundo lugar, se f_λ é contínua em τ , então $\tau \subset \tau^{f_\lambda}$.
- 7.2.5** É só verificar os axiomas da definição de topologia.
- 7.2.6** Faça $X = Y$ e escolha duas topologias em Y tais que a união das duas não é uma topologia.
- 7.2.7** Qual é o formato das vizinhanças de 7?
- 7.2.8** Qual é o formato das vizinhanças de 11?
- 7.2.9** Mostre que o conjunto $f(I_\varepsilon)$ é aberto na topologia final.
- 7.3.7** Estamos falando de espaços métricos?

-
- 7.3.8** Componha com a projeção canônica $\pi_{\Gamma,\lambda} : X_\Gamma \rightarrow X_\lambda$.
- 7.3.9** Primeiro tem que entender o significado de $\prod_{\Gamma \in \tilde{\Gamma}} X_\Gamma$, de $(\Pi_\Gamma(x))_{\Gamma \in \tilde{\Gamma}}$ e de f .
- 7.4.1** A topologia usual de \mathbb{C} é dada pela identificação de \mathbb{C} e \mathbb{R}^2 .
- 7.4.2** $\tilde{f}(A) = f(\pi^{-1}(A))$.
- 7.4.3** Precisa de um $A \subset X$ aberto tal que $\pi^{-1}(\pi(A))$ não seja aberto.
- 7.5.1** A união finita de conjuntos enumeráveis é enumerável.
- 7.5.2** Use o fato de X ser não-enumerável.
- 7.5.3** Tome uma vizinhança de x na topologia τ_M .
- 8.3.1** Veja a Definição 8.14.
- 8.3.2** Se C_x é a componente conexa de x , mostre que $\overline{C_x} \subset C_x$.
- 8.3.3** Na topologia induzida em C , o conjunto $C \cap F$ é aberto e fechado.
- 8.3.4** Use o Exercício 8.3.3.
- 8.3.5** É possível??? :-P
- 8.3.6** Basta usar que $[0, 1]$ é “localmente conexo”.
- 8.3.7** Basta usar que \mathbb{R}^n é “localmente conexo”.
- 8.3.8** Use a topologia induzida em $\bigcup C_\lambda$.
- 8.3.9** O que é um fechado e o que é um aberto na topologia induzida?
- 8.3.10** Faça como no Exercício 8.3.8.
- 8.4.1** Não se descabele!!!
- 8.4.2** Não se descabele!!!
- 8.4.3** Escolha $q \in B_p \cap P'$ distinto de p , e mostre que p não pertence à componente conexa de q .
- 8.4.4** Faça como na Proposição 8.12, e observe o comentário feito antes da definição de componente conexa (Definição 8.14).
- 8.4.7** Faça da mesma forma que fizemos para mostrar que a componente conexa de qualquer ponto em \mathbb{Q} é um conjunto unitário.
- 8.4.8** Mostre que P_2 é um aberto de P .
- 8.4.9** Mostre que $f^{-1}(P_1)$ é vizinhança de todos os seus pontos.
- 8.4.10** É só usar os Exercícios 8.4.8 e 8.4.9.
- 8.5.1** Tome um ponto da componente conexa e mostre que a componente é uma vizinhança deste ponto.
- 8.5.2** Faça como no Exemplo 8.3.
- 8.5.3** Tome uma vizinhança conexa por caminhos para cada ponto na componente conexa. Depois faça com pontos fora da componente.
- 8.5.4** Use o Exercício 8.5.3.
- 8.5.6** Mostre que não é localmente conexo.

-
- 8.5.7** A é aberto.
- 9.1.4** Uma cobertura de K também cobre todos os K_1, \dots, K_n .
- 9.1.5** Escreva os elementos de $Y \cap \tau_X$ na forma $Y \cap A$, para $A \in \tau_X$.
- 9.1.6** Você acabou de mostrar isso!
- 9.2.2** Imagem de compacto é compacta.
- 9.2.4** Passo de indução: Exercício 7.3.9.
- 9.3.1** Tome $[a, b] \supset M$.
- 9.3.2** Use o Exercício 9.3.1.
- 9.3.3** Veja o comentário depois da Definição 9.2.
- 9.3.4** É só fazer exatamente como no Lema.
- 9.3.5** Seja A um conjunto qualquer com $\sup A < \infty$. Mostre que $A \cup \{\sup A\}$ é compacto.
- 9.3.6** Use o Exercício 9.3.5, e a função identidade para construir um contraexemplo.
- 9.3.7** Para cada $a \in \mathbb{R}$, os conjuntos da forma $[a, a + \varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$ formam uma base de vizinhanças de a .
- 9.3.8** Mostre que os conjuntos da forma (a, b) são abertos.
- 9.4.1** Use as projeções de K na primeira e na segunda coordenadas.
- 9.4.2** Só tem um!
- 9.5.3** Veja o Exercício 9.5.2.
- 9.5.5** x está no fecho de F_k .
- 9.5.6** E se $x_1 = x$?
- 9.5.7** Veja a demonstração da Proposição 9.28. Use a Proposição 5.22.
- 9.5.9** <http://math.stackexchange.com/>
- 9.6.2** É trivial.
- 9.6.4** Use o Exercício 9.6.3.
- 9.6.5** Modifique a solução do Exercício 9.6.3.
- 9.6.6** É só substituir vizinhança por vizinhança aberta.
- 9.6.7** Use a aplicação identidade $\text{id} : (X, \tau_c) \rightarrow (X, \tau_h)$.
- 9.6.8** Use a rigidez compacto-Hausdorff.
- 9.7.1** A cobertura não tem subcobertura finita.
- 9.7.2** $X = \bigcap_{V \in \emptyset} V$.
- 9.7.4** Um exemplo: $\mathcal{U} = \{(-\infty, b - \frac{1}{n}) \mid n = 1, 2, \dots\}$.
- 9.8.1** Discretos só são compactos quando são finitos.

Respostas

1.1.1 $y \in B_\varepsilon(x) \Leftrightarrow d(x, y) < \varepsilon \Leftrightarrow d(y, x) < \varepsilon \Leftrightarrow x \in B_\varepsilon(y)$.

1.1.2 $y \in B_\delta(x) \Rightarrow d(x, y) < \delta \Rightarrow d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow y \in B_\varepsilon(x)$.

1.1.3 Não. Veja o Exemplo 1.9.

1.1.4 Sim. Pois o item (2) garante que $d(z, y) = d(y, z)$.

1.1.5 Sim. Fazendo $z = y$, teremos

$$d(x, y) \leq d(y, x) + d(y, y) = d(y, x).$$

Trocando os papéis de x e y obtemos a desigualdade inversa.

1.1.6 É fácil ver que se d é uma métrica, irá satisfazer as condições enunciadas. Para ver que essas condições garantem que d é uma métrica, faça como no exercício 1.1.5 para concluir que $d(x, y) = d(y, x)$, e como no exercício 1.1.4 para concluir que vale a desigualdade triangular.

1.1.7 Veja o exercício 1.3.7.

1.1.8 Quem fizer isso, por favor, mande um e-mail para topologia-geral-discussion@lists.ourproject.org.

1.2.1 É evidente que para $0 < \delta < \varepsilon$, $B_\delta(x) \subset B_\varepsilon(x)$. Assim, a união também está contida em $B_\varepsilon(x)$. Por outro lado, se $y \in B_\varepsilon(x)$, então $d(x, y) < \varepsilon$. Tomando δ' satisfazendo $d(x, y) < \delta' < \varepsilon$, temos que $y \in B_{\delta'}(x)$. Portanto

$$B_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{0 < \delta < \varepsilon} B_\delta(x).$$

1.2.2 É evidente que x está na interseção. Precisamos apenas mostrar que $y \neq x$ não está. Basta então tomar k' tal que $\frac{1}{n_{k'}} < d(x, y)$ para que $y \notin B_{\frac{1}{n_{k'}}}(x)$.

1.2.3 Use a Proposição 1.5 para obter números reais $\delta_1, \dots, \delta_n$ maiores que zero, tais que $B_{\delta_j}(x) \subset B_{\varepsilon_j}(x_j)$. Basta fazer $\delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_n)$.

1.2.4 Porque pode ser que $\inf(\delta_j) = 0$.

1.2.5 Para mostrar que um ponto $y \neq x$ não está na interseção, foi usado que $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$. Para mostrar que x está na interseção, foi usado que $d(x, x) = 0$. Ou seja, $x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$.

1.2.6 O item (1) serviu para que $\varepsilon > 0$. O item (2) não serviu em nada na demonstração, mas se tivéssemos enunciado que “existem duas bolas que separam os pontos x e y ”, teria servido para garantir que $x \in B_\varepsilon(x)$, e $y \in B_\varepsilon(y)$. Sem o item (3), não poderíamos garantir que $a \in B_\varepsilon(y) \Rightarrow d(a, y) < \varepsilon$. Finalmente, a desigualdade triangular serviu para que a interseção das bolas fosse vazia. Ou seja, se

$$a \in B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y),$$

então

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < \varepsilon + \varepsilon \leq d(x, y).$$

1.3.1 1. $d((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = 0 \Leftrightarrow d_A(a_1, a_2) = 0$ e $d_B(b_1, b_2) = 0 \Leftrightarrow (a_1, b_1) = (a_2, b_2)$.

2. Evidente.

3. Note que

$$\begin{aligned} d_A(a_1, a_3) &\leq d_A(a_1, a_2) + d_A(a_2, a_3) \\ &\leq \max\{d_A(a_1, a_2), d_B(b_1, b_2)\} + \max\{d_A(a_2, a_3), d_B(b_2, b_3)\}. \end{aligned}$$

E do mesmo modo,

$$d_B(b_1, b_3) \leq \max\{d_A(a_1, a_2), d_B(b_1, b_2)\} + \max\{d_A(a_2, a_3), d_B(b_2, b_3)\}.$$

Assim,

$$\max\{d_A(a_1, a_3), d_B(b_1, b_3)\} \leq \max\{d_A(a_1, a_2), d_B(b_1, b_2)\} + \max\{d_A(a_2, a_3), d_B(b_2, b_3)\}.$$

1.3.2 Primeiramente, precisamos mostrar que para todos os $(x_\lambda), (y_\lambda) \in X$,

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} d_{X_\lambda}(x_\lambda, y_\lambda) < \infty.$$

Mas isso vem do fato de que a imagem de d_{X_λ} está contida em $[0, 1]$.

1. $d((x_\lambda), (y_\lambda)) = 0 \Leftrightarrow \forall \lambda \in \Lambda, d_{X_\lambda}(x_\lambda, y_\lambda) = 0 \Leftrightarrow (x_\lambda) = (y_\lambda)$.
2. Evidente.
3. Note que para cada $\lambda \in \Lambda$,

$$\begin{aligned} d_{X_\lambda}(x_\lambda, z_\lambda) &\leq d_{X_\lambda}(x_\lambda, y_\lambda) + d_{X_\lambda}(y_\lambda, z_\lambda) \\ &\leq \sup_{\gamma \in \Lambda} d_{X_\gamma}(x_\gamma, y_\gamma) + \sup_{\gamma \in \Lambda} d_{X_\gamma}(y_\gamma, z_\gamma). \end{aligned}$$

Assim, tomando o supremo em $\lambda \in \Lambda$,

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} d_{X_\lambda}(x_\lambda, z_\lambda) \leq \sup_{\gamma \in \Lambda} d_{X_\gamma}(x_\gamma, y_\gamma) + \sup_{\gamma \in \Lambda} d_{X_\gamma}(y_\gamma, z_\gamma).$$

1.3.3 Mesmo com a possibilidade de $d(x, y) = \infty$, as propriedades demonstradas no exercício 1.3.2 são válidas. Para ver que $d|_{\tilde{X} \times \tilde{X}}$ não assume o valor ∞ , basta observar que se $x, y \in \tilde{X}$, então

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(y, a) < \infty.$$

1.3.4 Basta fazer exatamente como nos exercícios 1.3.2 e 1.3.3.

1.3.5 Basta utilizar o exercício 1.3.4, e reparar que $\tilde{X} = X$, pois para todo $x \in X$,

$$d(x, a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_{X_n}(x_n, y_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

1.3.6 $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1|$.

1.3.7 Para o item (1), se $x = y$, então $d(x, y) = |x - y| = 0$. Por outro lado, se $d(x, y) = 0$, então $|x - y| = 0$. Ou seja, $x = y$.

Para o item (3), note que $|x - y| \leq d(x, y)$. Portanto, se x é diferente de 0, então

$$d(x, z) = |x - z| \leq |x - y| + |y - z| \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Se $x = y$, a desigualdade triangular é evidente, pois neste caso, $d(x, y) = 0$. Se $x = 0$ e $y \neq x$, então

$$d(x, z) \leq 1 \leq 1 + d(y, z) = d(x, y) + d(y, z).$$

Para ver que d não é uma métrica, basta notar que $d(0, \frac{1}{2}) = 1$, enquanto que $d(\frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{2}$.

2.1.1 Em \mathbb{R} , com a métrica euclidiana, temos, por exemplo, $x_n = (-1)^n$. Um outro exemplo em \mathbb{R} , é a sequência $x_n = n$.

2.1.2 Suponha que $x_n \rightarrow x$, e $x \neq y$. Escolha $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \frac{d(x, y)}{2}$, então existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$. Em particular, para todo $n \geq N$, temos que $d(x_n, y) \geq d(x, y) - d(x_n, x) > \frac{d(x, y)}{2} > \varepsilon$. Ou seja, x_n não converge para y .

2.1.3 Significa que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$, $x_n = x$.

2.1.4 Vamos fixar $j \in \mathbb{N}$. Se $x^n \rightarrow x$, então para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ teremos que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |x_k^n - x_k| < \frac{\varepsilon}{2^j}$. Em particular, para todo $n > N$, $|x_j^n - x_j| < \varepsilon$. Ou seja, para todo j , $x_j^n \rightarrow x_j$.

Por outro lado, se para todo j , $x_j^n \rightarrow x_j$, então, dado $\varepsilon > 0$, existe N_j tal que para todo $n > N_j$, $|x_j^n - x_j| < \frac{\varepsilon}{2}$. Agora, seja M tal que $\sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \frac{\varepsilon}{2}$. Então, é só escolher $N = \max_{j=1}^M N_j$. De fato, para $n > N$, teremos que

$$\begin{aligned} d(x^n, x) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} |x_j^n - x_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^M \frac{1}{2^j} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

2.1.5 Por exemplo,

$$\begin{aligned} 1. \quad x_j^n &= \begin{cases} 0 & , j \geq n \\ 1 & , j < n \end{cases} . \\ 2. \quad x_j^n &= \begin{cases} 1 & , j = n \\ 0 & , j \neq n \end{cases} . \end{aligned}$$

2.1.6 Basta observar que

$$d(x^n, x) < \varepsilon \Leftrightarrow \forall j \in \mathbb{N}, |x_j - x_j^n| < \varepsilon.$$

2.1.7 Os exemplos listados na respostado exercício 2.1.5.

2.2.1 Seja $x_n, x \in X$, com $x_n \rightarrow x$. Então, $f(x_n) = f(x) \rightarrow f(x)$.

2.2.2 A continuidade de f é imediata dos exercícios 2.1.4 e 2.1.6. Já o exercício 2.1.7, mostra que a inversa não é contínua.

2.2.3 Seja $a = (a_j) \in X$ um ponto qualquer do domínio de f^{-1} . E seja $e_n = (\delta_{nj}) \in X$, onde δ_{nj} é 0 quando $n \neq j$, e 1 quando $n = j$. Então, $a + e_n \rightarrow a$ em $(X, 2)$, mas $a + e_n \not\rightarrow a$ em $(X, 1)$.

2.2.4 Suponha que $x_n, x \in \mathbb{Q}$ com $x_n \rightarrow x$. Se $x < \sqrt{2}$, então existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q < \sqrt{2}$. Portanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$, $x_n < q$. Em particular, para $n > N$, temos que $f(x_n) = 0$. Portanto $f(x_n) \rightarrow 0 = f(x)$.

Por outro lado, se $x \geq \sqrt{2}$, então $x > \sqrt{2}$. E da mesma forma que no caso $x < \sqrt{2}$, teremos que existe $q \in \mathbb{Q}$ satisfazendo $x > q > \sqrt{2}$, e $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$ temos $x_n > q$. O que implica que para $n > N$, $f(x_n) = 1 = f(x)$. Em particular, $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

2.2.5 A aplicação $f|_{\mathbb{Q}}$ é uma aplicação constante. Pelo exercício 2.2.1, $f|_{\mathbb{Q}}$ é contínua. No entanto, escolhendo $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, temos que para todo racional q , $q + \frac{a}{n}$ é irracional e converge para q . Como, $f(q + \frac{a}{n}) = 1 \not\rightarrow 0 = f(q)$, temos que f não é contínua em q .

2.3.1 A afirmação é exatamente a mesma que a equivalência entre os itens (1) e (3) da Proposição 2.10.

2.3.2 Suponha que f é contínua em todo ponto. Então, dado um aberto $U \subset Y$, vamos mostrar que $f^{-1}(U)$ é um aberto de X . De fato, se $x \in f^{-1}(U)$, então $f(x) \in U$. Como U é aberto, U é vizinhança de $f(x)$. Pelo exercício 2.3.1, $f^{-1}(U)$ é vizinhança de x . Como x era um elemento arbitrário de $f^{-1}(U)$, temos que $f^{-1}(U)$ é aberto.

Por outro lado, suponha que $f^{-1}(U)$ é aberto para todo aberto $U \subset Y$. Note que para $x \in X$, a Proposição 1.4 garante que $B_\varepsilon(f(x))$ é um aberto de Y . portanto $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ é um aberto de X . Em particular, $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ é uma vizinhança de x , e portanto, existe uma bola $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Ou seja, f é contínua em x pelo item (2) da Proposição 2.10. Como $x \in X$ é qualquer, temos que f é contínua.

2.3.3 Sabemos que $x_n \rightarrow x$ se, e somente se, para toda bola $B_\varepsilon(x)$ centrada em x , $N_{B_\varepsilon(x)}$ for finito. Portanto, se para toda a vizinhança V tivermos N_V finito, em particular teremos $N_{B_\varepsilon(x)}$ finito.

Por outro lado, se $N_{B_\varepsilon(x)}$ é sempre finito, então dada uma vizinhança V qualquer de x , temos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset V$. Neste caso, $N_V \leq N_{B_\varepsilon(x)} < \infty$.

2.3.4 Pelo exercício 2.3.3, se $x_n \rightarrow x$, como A é vizinhança de x , N_A é finito.

Por outro lado, se N_A é sempre finito para um conjunto aberto A que contenha x , então, como pela Proposição 1.4 sabemos que $B_\varepsilon(x)$ é um conjunto aberto, temos que $N_{B_\varepsilon(x)}$ é finito para todo $\varepsilon > 0$. Ou seja, $x_n \rightarrow x$.

3.1.1 Basta escolher $\mathcal{B} = \left\{ B_{\frac{1}{n}}(x) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. Se $V \in \mathcal{V}(x)$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset V$. Se tomarmos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$, então $B_{\frac{1}{n}}(x) \subset B_\varepsilon(x) \subset V$. A relação de inclusão entre as bolas segue do fato de que $B_{\frac{1}{n}}(x) \subset B_{\frac{1}{m}}(x)$ se, e somente se, $n \geq m$.

3.1.2 Denote por

$$\mathcal{W} = \{V \subset X \mid \exists n \in \mathbb{N}, B_{\varepsilon_n}(x) \subset V\}$$

o conjunto que queremos mostrar ser igual a $\mathcal{V}(x)$. É evidente que $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}(x)$, pois todo elemento de \mathcal{W} contém uma bola centrada em x . Se $V \in \mathcal{V}(x)$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset V$. Mas como $\varepsilon_n \rightarrow 0$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon_n \leq \varepsilon$. Para este n , temos que $B_{\varepsilon_n}(x) \subset B_\varepsilon(x) \subset V$.

3.1.3 Denote por

$$\mathcal{W} = \{V \subset X \mid \exists B \in \mathcal{B}, B \subset V\}$$

o conjunto que queremos mostrar ser igual a $\mathcal{V}(x)$. Como todos os elementos de \mathcal{B} são vizinhanças de todos os seus pontos, e todos eles contém o ponto x , temos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}(x)$. Sabemos que se $B \in \mathcal{V}(x)$, e $B \subset V$, então $V \in \mathcal{V}(x)$. Assim, $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}(x)$. Por outro lado, como \mathcal{B} contém o conjunto de todas as bolas centradas em x , a definição de $\mathcal{V}(x)$ implica que $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{W}$.

3.1.4 Como $x_n \rightarrow x$, já sabemos pela Proposição 3.3, que o conjunto N_V é finito. Precisamos mostrar que se N_V não for uma vizinhança de x , então existe uma sequência $x_n \rightarrow x$ tal que N_V não é finito. Com V não é uma vizinhança de x , então para cada $n \in \mathbb{N}$, a bola $B_{\frac{1}{n}}(x)$ não está contida em V . Basta então tomar $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \setminus V$.

3.1.5 Seja $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots\} \subset \mathcal{V}(x)$, a família do exercício 3.1.1, ordenada de modo que $B_1 \supset B_2 \supset \dots$. Faça $n_1 = m_1 = 1$. E para $k > 1$, escolha indutivamente $n_k > n_{k-1}$ tal que $x_{n_k} \in B_k$. Como B_k é vizinhança de x_{n_k} , podemos escolher $m_k > m_{k-1}$ tal que $x_{n_k}^{m_k} \in B_k$.

Para ver que $x_{n_k}^{m_k} \rightarrow x$, escolha uma vizinhança qualquer $V \in \mathcal{V}(x)$. Para este V , existe — pelo exercício 3.1.1 —, $K \in \mathbb{N}$ tal que $B_K \subset V$. Pela construção de $x_{n_k}^{m_k}$, temos que para $k \geq K$, $x_{n_k}^{m_k} \in B_k \subset B_K \subset V$.

5.2.1 Como τ é gerada por τ_i e τ_s , a Proposição 5.11 garante que f é contínua em τ se, e somente se, for contínua em τ_i e τ_s .

5.2.2 A família formada pelas interseções finitas de elementos de \mathcal{S} , incluindo a interseção vazia — ou seja, incluindo o conjunto X —, forma uma base $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ para a topologia. Mas o único conjunto desta forma que contém x é o próprio X . Por isso, as vizinhanças de x são apenas os conjuntos que contém X . Ou seja, a única vizinhança de x é o próprio X .

5.2.3 Para todo $x \in X$, dado $V \in \mathcal{V}(x)$, existe um aberto A com $x \in A \subset V$. Se f é aberta, $f(V) \supset f(A)$ é uma vizinhança de $f(x)$. Portanto, f é aberta em todo $x \in X$.

Por outro lado, suponha que f é aberta em todo $x \in X$. Dado um aberto A qualquer, para todo $a \in A$, $f(A)$ é vizinhança de $f(a)$. Ou seja, $f(A)$ é vizinhança de todos os seus pontos. Portanto, $f(A)$ é aberto.

5.2.4 É evidente que se f é aberta, $f(\mathcal{F}) \subset \tau_Y$.

Por outro lado, dado $A \in \tau_X$ e $a \in A$ um ponto qualquer de A , existem membros $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ tais que

$$a \in A_1 \cap \dots \cap A_n \subset A.$$

Portanto,

$$f(a) \in f(A_1 \cap \dots \cap A_n) \subset f(A_1) \cap \dots \cap f(A_n) \subset f(A).$$

Por hipótese, $f(A_j)$ é aberto. E portanto, $f(A_1) \cap \dots \cap f(A_n)$ é vizinhança de $f(a)$. Assim, $f(A)$ é vizinhança de todos os seus pontos. Ou seja, $f(A)$ é aberto.

5.3.1 Precisamos apenas mostrar que dado $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}(x)$ é uma base de vizinhanças para x . Note que os conjuntos da forma (α, β) , com $\alpha < x < \beta$, formam uma base de vizinhanças de x . Dada uma tal vizinhança, escolha um racional a e um irracional b tais que $\alpha < a < x < b < \beta$. Então, $(a, b) \in \mathcal{B}$ é uma vizinhança de x com $(a, b) \subset (\alpha, \beta)$. E portanto, $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}(x)$ é uma base de vizinhanças para x .

5.3.2 Não. O problema é mais fácil de entender se pensarmos em termos de bases de vizinhanças de um ponto x . Se \mathcal{B}_x é uma base de vizinhanças, então, dados $A, B \in \mathcal{B}_x$, deve existir $C \in \mathcal{B}_x$ tal que $C \subset A \cap B$.

Por exemplo, o Exercício 5.3.1 implica que a família

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \subset \mathbb{R} \mid a \in \mathbb{Q}, b \notin \mathbb{Q}\} \cup \{(a, b) \subset \mathbb{R} \mid a \notin \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$$

é uma base para a topologia usual de \mathbb{R} . Mas os conjuntos da forma (a, b) , com $a, b \in \mathbb{Q}$ não estão na base.

5.3.3 Pelo item (5) da Proposição 5.14, basta mostrar que, para $A, B \in \mathcal{B}$, dado $x \in A \cap B$, existe $C \in \mathcal{B}$, com $x \in C \subset A \cap B$. Mas isso é o mesmo que dizer que $A \cap B$ é união de elementos de \mathcal{B} .

5.4.1 Note que existe apenas um número finito de subfamílias de \mathcal{S} . A família

$$\tau = \left\{ \bigcup_{j=1}^n \bigcap_{S \in \mathcal{S}'} S \mid n \in \mathbb{N}, \mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n \subset \mathcal{S} \right\}$$

é uma topologia finita e contém todos os elementos de \mathcal{S} . Aqui, estamos usando a convenção $\bigcap_{A \in \emptyset} A = X$ e $\bigcup_{A \in \emptyset} A = \emptyset$.

5.4.2 Caso contrário, a família \mathcal{B}_n não teria a mesma cardinalidade que \mathcal{S} . E da mesma forma, se \mathcal{S} é infinito, a cardinalidade da união enumerável de conjuntos \mathcal{B}_n com a mesma cardinalidade que \mathcal{S} , terá a mesma cardinalidade que \mathcal{S} . É evidente que isso não será verdade se \mathcal{S} tiver apenas finitos elementos.

5.4.3 Não existe!!! :-P

Se \mathcal{V} é uma base de vizinhanças de x com finitos elementos, então,

$$V = \bigcap_{A \in \mathcal{V}} A$$

é uma vizinhança de x que está contida em todas as vizinhanças de x . Ou seja, $\{V\}$ é uma base de vizinhanças.

5.4.4 Se V é uma vizinhança de x , então existe N tal que $B_N \subset V$. Como B_n é uma sequência decrescente de conjuntos, por construção, para $n \geq N$,

$$x_n \in B_n \subset B_N \subset V.$$

7.1.1 TODO: envie sua resposta para
topologia-geral-discussion@lists.ourproject.org

7.1.2 TODO: envie sua resposta para
topologia-geral-discussion@lists.ourproject.org

7.2.1 TODO: envie sua resposta para
topologia-geral-discussion@lists.ourproject.org

7.2.2 TODO: envie sua resposta para
topologia-geral-discussion@lists.ourproject.org

7.2.3 TODO: envie sua resposta para
topologia-geral-discussion@lists.ourproject.org

7.2.4 TODO: envie sua resposta para
topologia-geral-discussion@lists.ourproject.org

7.2.5 TODO: envie sua resposta para
topologia-geral-discussion@lists.ourproject.org

7.2.6 TODO: envie sua resposta para
topologia-geral-discussion@lists.ourproject.org

7.2.7 TODO: envie sua resposta para
topologia-geral-discussion@lists.ourproject.org

7.2.8 TODO: envie sua resposta para
topologia-geral-discussion@lists.ourproject.org

7.2.9 TODO: envie sua resposta para
topologia-geral-discussion@lists.ourproject.org

7.3.1 Suponha que $(x, y) \in \overline{\text{Gr}(f)}$. Então, como Y é um espaço métrico, existem vizinhanças disjuntas U e V de y e $f(x)$ respectivamente. Pela continuidade de f , $A = f^{-1}(V)$ é vizinhança de x . E pela definição de topologia produto, $A \times U$ é uma vizinhança de (x, y) . Como este é um ponto que está no fecho do gráfico de f , a vizinhança $A \times U$ intersecta o gráfico. Ou seja, existe $a \in X$ tal que $a \in A = f^{-1}(V)$ e $f(a) \in U$. Mas isto implica que $f(a) \in V$ e $f(a) \in U$. O que não é possível, já que U e V são vizinhanças disjuntas.

7.3.2 Seja $Y = \{0, 1\}$ com a topologia $\{\emptyset, Y\}$, e f constante igual a 0. Então o gráfico de f é o conjunto

$$\text{Gr}(f) = X \times \{0\}.$$

Mas este conjunto não é fechado na topologia produto. (por quê?)

7.3.3 O exercício 7.3.1 mostra que H é um subconjunto fechado de $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$. Para concluir que é um subconjunto fechado de \mathbb{R}^2 , precisamos apenas mostrar que nenhum ponto da forma $(0, y)$ está no fecho de H (por quê isso é suficiente?).

Então tome um ponto qualquer da forma $(0, y)$. Para qualquer $w > |y|$,

$$\left(-\frac{1}{w}, \frac{1}{w}\right) \times (-w, w)$$

é uma vizinhança de $(0, y)$ que não intersecta H (por quê?).

7.3.4 Pela definição de H , a projeção na primeira coordenada é o conjunto

$$\{x \in X \mid x \neq 0\},$$

que evidentemente não é fechado. Consequentemente, neste caso, a projeção não é uma aplicação fechada.

7.3.5 TODO: envie sua resposta para
topologia-geral-discussion@lists.ourproject.org

7.3.6 O conjunto $\pi_\lambda^{-1}(A)$ representa todos os pontos cuja λ -ésima coordenada está em A . A λ -ésima coordenada de qualquer ponto de $X(\gamma, x)$ é x_λ . Assim, se $x_\lambda \in A$, $X(\gamma, x) \subset \pi_\lambda^{-1}(A)$. Caso contrário, $X(\gamma, x) \cap \pi_\lambda^{-1}(A) = \emptyset$.

7.3.7 Como D é um espaço métrico, a topologia produto de $X = D^{\mathbb{N}}$ também é dada por uma métrica, como no Exemplo 7.28. A afirmação de que f é contínua segue da Proposição 3.15.

7.3.8 Pela definição de topologia produto X_Γ , π_Γ é contínua se, e somente se, $\pi_{\Gamma,\lambda} \circ \Pi_\Gamma$ é contínua para todo $\lambda \in \Gamma$, onde $\pi_{\Gamma,\lambda} : X_\Gamma \rightarrow X_\lambda$ é a projeção canônica. Mas esta composição é simplesmente a projeção canônica $\pi_\lambda : X_\Lambda \rightarrow X_\lambda$, que é contínua pela definição de topologia produto em X_Λ .

Pelo Exercício 5.2.4, para ver que Π_Γ é aberta, basta mostrar que a imagem de $A' := \pi_\lambda^{-1}(A)$ — onde $\pi_\lambda : X_\Lambda \rightarrow X_\lambda$ e $A \subset X_\lambda$ é um aberto — é aberta. Mas isso é evidente, já que

$$\Pi_\Gamma(A') = \pi_{\Gamma,\lambda}^{-1}(A)$$

é aberto pela continuidade de $\pi_{\Gamma,\lambda}$.

7.3.9 É evidente que f é uma bijeção. Pelo Exercício 7.3.8, a Γ -ésima coordenada de f é contínua para todo Γ . Portanto, f é contínua.

Pelo Exercício 5.2.4, para ver que f é aberta, basta mostrar que a imagem de $A' := \pi_\lambda^{-1}(A)$ — onde $\pi_\lambda : X_\Lambda \rightarrow X_\lambda$ e $A \subset X_\lambda$ é um aberto — é aberta. Mas isso é evidente, já que

$$f(A') = \pi_\Gamma^{-1}(\pi_{\Gamma,\lambda}^{-1}(A)),$$

onde $\pi_\Gamma : \prod_{\Gamma \in \bar{\Gamma}} X_\Gamma \rightarrow X_\Gamma$ e $\pi_{\Gamma,\lambda} : X_\Gamma \rightarrow X_\lambda$ são a projeção canônica, é aberto pela continuidade de $\pi_{\Gamma,\lambda}$ e de π_Γ .

7.4.1 Pelo item (5) da Proposição 7.21, basta mostrarmos que $\cos(2\pi x)$ e $\sin(2\pi x)$ são contínuas. Mas a demonstração deste fato depende bastante do que é que você entende por $\sin(\theta)$ e $\cos(\theta)$. :-)

7.4.2 A equivalência entre a continuidade de f e a de $f \circ \pi$ é o conteúdo da Proposição 7.15. Se f é homeomorfismo, em particular, é aberta. Como π também é aberta, $f \circ \pi$ é aberta.

Por outro lado, suponha que $f \circ \pi$ é aberta. Tome um aberto A de X/\sim . Então, $\pi^{-1}(A)$ é um aberto de X . Como $f \circ \pi$ é aberta,

$$f(A) = f \circ \pi(\pi^{-1}(A))$$

é um conjunto aberto.

7.4.3 Faça $X = \{a, b, c\}$ com a topologia $\tau_X = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$. Use a partição $\{\{a, b\}, \{c\}\}$ para definir a relação de equivalência.

Agora, $A = \{a\}$ é aberto de X , mas $\pi(A) = \{\{a, b\}\}$ não é aberto, pois

$$\pi^{-1}(\{\{a, b\}\}) = \{a, b\},$$

que não é aberto. De fato, a topologia quociente é dada por

$$\{\emptyset, X/\sim\},$$

pois nem $\{a, b\}$ nem $\{c\}$ são abertos em X .

7.5.1 TODO: envie sua resposta para topologia-geral-discussion@lists.ourproject.org

7.5.2 Tome $p \in X$. Então, $\{p\} \notin \tau_2$. Mas é evidente que $A \in \tau_1$, pois todos os subconjuntos de X estão em τ_1 .

Como sabemos que tal conjunto existe?

7.5.3 Assuma que $x_n \xrightarrow{\tau_X} x$. Tome uma vizinhança aberta V de x na topologia τ_M . Pela definição de τ_M , sabemos que existe N tal que

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in V.$$

Como V é uma vizinhança aberta qualquer, isso é o mesmo que dizer que $x_n \xrightarrow{\tau_M} x$.

8.3.1 A componente conexa do ponto x , é a união de todos os conjuntos conexos que contém x . Desta forma, não existe nenhum conexo contendo x que seja “maior” que a componente conexa.

Denotando por C_x a componente conexa de x , vale a afirmação:

$$C \text{ é conexo e } x \in C \Rightarrow C \subset C_x.$$

8.3.2 Pela Proposição 8.12, a componente conexa de x , C_x é um conjunto conexo. Pela Proposição 8.13, $\overline{C_x}$ é conexo. Portanto,

$$\overline{C_x} \subset C_x.$$

Ou seja, C_x é fechado.

8.3.3 O conjunto não vazio $C \cap F$ é, na topologia induzida em C , um aberto e fechado. Pela conexidade de C , temos que $C \cap F = C$. Mas isso é o mesmo que $C \subset F$.

8.3.4 Seja $F \subset X$ um aberto e fechado. É evidente que

$$F \subset \bigcup_{x \in F} C_x,$$

onde C_x é a componente conexa de x . No entanto, o Exercício 8.3.3 implica que $C_x \subset F$. Portanto,

$$F = \bigcup_{x \in F} C_x.$$

8.3.5 O Exercício 8.3.4 não nos permite chegar a tal conclusão, mesmo porque a afirmação é falsa!!! Veja, o Exemplo 8.5, que mostra que as componentes conexas de \mathbb{Q} , com sua topologia usual, são conjuntos unitários. Mas os conjuntos unitários não são abertos na topologia induzida de \mathbb{R} , pois os abertos de \mathbb{R} contém infinitos pontos de \mathbb{Q} .

8.3.6 Os intervalos são conexos. Se C é uma componente conexa do aberto, então, para cada $a \in C$, existe um intervalo J , aberto em $[0, 1]$, com $a \in J \subset A$. Por terem o ponto a em comum, a Proposição 8.12 garante que $J \cup C \subset A$ é conexo. Pela maximalidade de C , $J \cup C = C$. Ou seja, $J \subset C$. E portanto, C é vizinhança de a . Como $a \in C$ é um ponto qualquer de C , temos que C é aberto.

8.3.7 Se $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, então é conexo, e pela Proposição 8.18, J^n é conexo. Se C é uma componente conexa do aberto, então, para cada $a \in C$, existe um intervalo aberto $J \subset \mathbb{R}$, com $a \in J^n \subset A$. Por terem o ponto a em comum, a Proposição 8.12 garante que $J^n \cup C \subset A$ é conexo. Pela maximalidade de C , $J^n \cup C = C$. Ou seja, $J^n \subset C$. E portanto, C é vizinhança de a . Como $a \in C$ é um ponto qualquer de C , temos que C é aberto.

8.3.8 O enunciado da proposição assume que os conjuntos C_λ são conexos. Mas esses conjuntos são conexos em X se, e somente se, forem conexos em $\bigcup C_\lambda$. De fato, só o que interessa é a topologia induzida em C_λ , que é a mesma em ambos os casos. Da mesma forma, o conjunto $\bigcup C_\lambda$ é conexo em X se, e somente se, for conexo na topologia induzida.

Ao assumirmos que o espaço é $\bigcup C_\lambda$, o enunciado da proposição fica da seguinte forma:

Seja C_λ uma família de subconjuntos conexos do espaço topológico $\bigcup C_\lambda$, tal que existe $c \in \bigcap C_\lambda$. Então $\bigcup C_\lambda$ é conexo.

Pelo argumento anterior, as hipóteses dessa nova forma são equivalentes à hipótese de os C_λ serem conexos em X , e a conclusão é equivalente a $\bigcup C_\lambda$ ser conexo em X . Ou seja, ambas as formas são equivalentes.

8.3.9 Sabemos que F é aberto e fechado. Na topologia induzida em C_λ , os abertos são conjuntos da forma $C_\lambda \cap A$, onde $A \subset X$ é um aberto. O mesmo vale para os fechados. Assim, na topologia induzida em C_λ , o conjunto $C_\lambda \cap F$ é aberto e fechado, já que F é aberto e fechado em X .

No entanto, não podemos concluir que $C_\lambda \cap F$ é aberto em X . Também não podemos concluir que é fechado em X .

Note que X é aberto e fechado em X . Mas dado um conjunto qualquer $C \subset X$ — por exemplo, um que não seja aberto ou fechado — não podemos concluir que $C = C \cap X$ é aberto e fechado em X . Podemos apenas concluir que C é aberto e fechado em C !

8.3.10 O enunciado da proposição assume que o conjunto C é conexo. Mas esse conjunto é conexo em X se, e somente se, for conexo em D . De fato, só o que interessa é a topologia induzida em C , que é a mesma em ambos os casos. Da mesma forma, o conjunto D é conexo em X se, e somente se, for conexo na topologia induzida.

Ao assumirmos que o espaço é D , o enunciado da proposição fica da seguinte forma:

Seja C uma subconjunto conexo do espaço topológico D , tal que $D = \overline{C}$. Então D é conexo.

Pelo argumento anterior, as hipóteses dessa nova forma são equivalentes à hipótese de C ser conexo em X , e a conclusão é equivalente a D ser conexo em X . Ou seja, ambas as formas são equivalentes.

8.4.1 Tome $X = \mathbb{R}^2$, $C = P_2$ do Exemplo 8.24 e $D = P_2 \cup \{(0, 1)\}$. Como já foi demonstrado no Exemplo 8.24, D não é conexo por caminhos, mas C e \overline{C} são.

8.4.2 Ao invés de tomar $X = \mathbb{R}^2$, basta tomar $X = D$ no Exercício 8.4.1.

8.4.3 Escolha $q \in B_p \cap P'$ distinto de p . É fácil ver que p não pertence à componente conexa de q , pois p e q podem ser separados por $[0, r) \times \mathbb{R}$ e $(r, 1] \times \mathbb{R}$, onde r é um irracional entre 0 e a primeira coordenada de q .

8.4.4 Vamos chamar de X o espaço topológico em questão. Primeiramente, precisamos mostrar que a definição “maior conexo por caminhos que contém a ” faz sentido. Para tanto, basta observar que a união de conjuntos conexos por caminhos que contém um ponto em comum a é conexa por caminhos. Sendo assim,

$$D = \bigcup_{\substack{E: \text{conexo por caminhos} \\ a \in E}} E.$$

Se C é a componente conexa por caminhos que contém a , então, evidentemente, $D \subset C$, pois todos os pontos de D podem ser ligados a a por um caminho. Por outro lado, C é conexo por caminhos. De fato, se $c, d \in C$, então existe um caminho em X que une c a a , e um que une a a d . Observe que este caminho está em C , pois cada ponto do caminho pode ser ligado a a . Agora, basta concatenar esses dois caminhos, utilizando a Proposição 8.21, para obter um caminho em C ligando c a d . Ou seja, $C \subset D$.

8.4.6 Mostrou-se que a imagem inversa de uma vizinhança de $(f * g)(\frac{1}{2})$ é uma vizinhança de $\frac{1}{2}$, pois $\frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2} < \frac{1+\beta}{2}$.

8.4.7 Suponha que a componente conexa tenha um outro ponto (a, b) , com $a \neq 0$. Basta escolher um irracional r com $0 < r < a$, para ver que os conjuntos

$$U = (-\infty, r) \times \mathbb{R} \text{ e } V = (r, \infty) \times \mathbb{R}$$

particionam o conjunto $B_p \cap P'$, que é um subconjunto de

$$(\{0\} \cup K) \times \mathbb{R}.$$

8.4.8 Note que

$$P_2 = P \cap (0, \infty) \times \mathbb{R}$$

é um aberto de P . Como f é contínua, o resultado segue.

8.4.9 Seja $t \in f^{-1}(P_1)$. Então, $f(t) = (0, a)$, com $a > 0$. Tome uma bola B centrada em $(0, a)$, de raio $\frac{a}{2}$. Como $f^{-1}(B)$ é aberto de $[0, 1]$, existe um intervalo aberto I de $[0, 1]$ contendo t , tal que $f(I) \subset B$. Como I é conexo, $f(I)$ está na componente conexa de B que contém $(0, a)$. Em particular, $f(I) \subset P_1$ (veja o Exercício 8.4.7). Ou seja, $f^{-1}(P_1) \supset I$ é vizinhança de t . Por ser vizinhança de todos os seus pontos, $f^{-1}(P_1)$ é aberto.

8.4.10 Se $f : [0, 1] \rightarrow P$ é um caminho qualquer, então, pelos Exercícios 8.4.8 e 8.4.9, $f^{-1}(P_1)$ e $f^{-1}(P_2)$ são abertos disjuntos cuja união é $[0, 1]$. Como $[0, 1]$ é conexo, sabemos que um dos dois conjuntos é vazio. Ou seja, nenhum caminho f pode unir pontos de P_1 e P_2 .

8.5.1 Seja C uma componente conexa. Tome $a \in C$. Por ser um espaço localmente conexo, existe uma vizinhança V de a conexa. Pela maximalidade da componente conexa C , temos que $V \subset C$. Ou seja, C é vizinhança de a .

8.5.2 Evidentemente que se as componentes conexas são abertas, então todo ponto possui uma vizinhança conexa. Suponha que todo ponto possui uma vizinhança conexa. Seja a um ponto qualquer, e C sua componente conexa. Se V é uma vizinhança conexa de a , então, pela maximalidade de C , temos que $V \subset C$. Ou seja, C é uma vizinhança de a .

8.5.3 Seja C uma componente conexa por caminhos. Para cada $a \in C$, existe uma vizinhança V de a que é localmente conexa por caminhos. Mas então, o conjunto $C \cup V$ é conexo por caminhos. E pela maximalidade de C , $C = C \cup V$. Ou seja, $V \subset C$. Assim, as componentes conexas por caminhos são abertas. Por outro lado, se $a \notin C$, então, por um argumento semelhante, vemos que C^c é um aberto. Ou seja, C é fechado.

8.5.4 Seja C uma componente conexa, e seja D uma componente conexa por caminhos que intersecta C . Como D é conexo, temos que $D \subset C$. Pelo Exercício 8.5.3, as componentes conexas por caminhos são abertas e fechadas. E portanto, pelo Exercício 8.3.4, $C \subset D$.

8.5.5 A demonstração de que C é aberta é feita como na proposição. Tomando $b \in C^c$, escolhemos uma vizinhança conexa por caminhos V de b . Agora, nenhum elemento de V pode ser ligado a a , pois isso contrariaria o fato de a não poder ser ligado a b . Assim, vemos que $b \in V \subset C^c$. Ou seja, C^c é um aberto, e pela conexidade de A , é vazio.

Comparação: Na demonstração da proposição, utilizamos o fato de as componentes conexas por caminhos serem conjuntos disjuntos, enquanto que na demonstração alternativa, mostramos que V e C são disjuntos. Os argumentos para mostrar essas duas coisas é exatamente o mesmo. Essencialmente, é tudo a mesma coisa... :-)

8.5.6 Vamos mostrar apenas que $\overline{P_2}$ não é localmente conexo por caminhos. No enunciado não diz, mas basta mostrar que $\overline{P_2}$ também não é localmente conexo! Basta notar que as vizinhanças de $(0, 1)$ intersectam um número infinito de “dentes do pente”, mas que no entanto, se essas vizinhanças não intersectarem $(0, 1] \times \{0\}$, não serão conexas, e portanto, não serão conexas por caminhos.

Sim, P_2 é localmente conexo por caminhos. De fato, é localmente conexo, pois cada “dente do pente” pode ser isolado um do outro com um aberto.

8.5.7 Seja $a \in A$. Tome uma base \mathcal{B} de vizinhanças de a em X conexas por caminhos. Faça

$$\mathcal{B}_A = \{B \in \mathcal{B} \mid B \subset A\}.$$

Como A é aberto, \mathcal{B}_A é uma base de vizinhanças de a tanto em X como em A (por que?). Como os elementos de \mathcal{B}_A são conexos por caminhos, A é localmente conexo por caminhos.

9.1.1 Veja a Proposição 9.8.

9.1.2 Veja a Proposição 9.9.

9.1.3 Veja a Proposição 9.11.

9.1.4 Seja \mathcal{U} uma cobertura aberta de K . Então, como \mathcal{U} cobre cada um dos K_1, \dots, K_n , existem subcoberturas finitas $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ para cada um desses compactos. Mas então,

$$\bigcup_{j=1}^n \mathcal{U}_j \subset \mathcal{U}$$

é uma cobertura finita de K .

9.1.5 Toda cobertura de K , $\mathcal{U} \subset \tau_X$ induz a cobertura $Y \cap \mathcal{U} \subset Y \cap \tau_X$. Assim, se K é compacto em $Y \cap \tau_X$, existe uma subfamília finita $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ tal que $Y \cap \mathcal{U}'$ cobre K . Mas isso implica que \mathcal{U}' cobre K . Portanto K é compacto em X .

Por outro lado, toda família $\mathcal{V} \subset Y \cap \tau_X$ é da forma

$$\mathcal{V} = Y \cap \mathcal{U}$$

para alguma família $\mathcal{U} \subset \tau_X$. Portanto, se \mathcal{V} cobre K , \mathcal{U} também cobre. Se K é compacto na topologia τ_X , então \mathcal{U} possui uma subcobertura finita \mathcal{U}' . Mas então, $Y \cap \mathcal{U}' \subset \mathcal{V}$ é uma subcobertura finita para K .

9.1.6 Basta fazer $Y = K$ no Exercício 9.1.5.

9.2.1 $f(x) = \frac{1}{x}$.

9.2.2 Pela Proposição 9.9, $f([0, 1])$ é um conjunto compacto, e portanto, pelo Exemplo 9.7, não pode ser ilimitado.

9.2.3 Sabemos que

$$\bigcup_{V \in \mathcal{U}} \mathcal{U}_V$$

tem uma subcobertura finita U_1, \dots, U_n . Mas cada U_j pertence a algum \mathcal{U}_{V_j} . Em particular,

$$X \subset U_1 \cup \dots \cup U_n \subset \left(\bigcup \mathcal{U}_{V_1} \right) \cup \dots \cup \left(\bigcup \mathcal{U}_{V_n} \right).$$

9.2.4 Suponha que vale para $n \leq k \leq 2$. Vamos mostrar que vale para $n = k + 1$.

Pelo Exercício 7.3.9, $X = X_1 \times \dots \times X_n$ é homeomorfo a $X_1 \times \dots \times (X_{n-1} \times X_n)$. Como $(X_{n-1} \times X_n)$ é compacto, temos que X é homeomorfo ao produto de $n - 1$ espaços compactos. Pela hipótese de indução, X é compacto.

9.3.1 Não, pois se $\sup |M| \leq m < \infty$, temos que $f(M) \subset f([-m, m])$, e este último é limitado pela compacidade de $[-m, m]$, juntamente com a Proposição 9.9.

9.3.2 Não, pois $g((0, 1))$ está contido em $g([0, 1])$ que é compacto e portanto limitado. No entanto, $f((0, 1))$ é um conjunto ilimitado.

9.3.3 Compacidade é uma propriedade que depende apenas da topologia induzida. Um conjunto $K \subset X$ é compacto na topologia de X se, e somente se, é um espaço topológico compacto quando considerada a topologia induzida.

Assim, os subconjuntos de \mathbb{Q} compactos, são os subconjuntos compactos de \mathbb{R} formados apenas por elementos de \mathbb{Q} . Ou seja, são conjuntos limitados e fechados em \mathbb{R} .

9.3.4 Veja a demonstração da Proposição 9.33.

9.3.5 Para que $K \subset \mathbb{R}$ seja compacto, é necessário que $\sup K < \infty$. Caso contrário,

$$\{(-\infty, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

é uma cobertura sem subcobertura finita.

Vamos mostrar que K é compacto se, e somente se, $\sup K \in K$. De fato, se $\sup K \in K$, então toda cobertura aberta de K deve conter um conjunto da forma $(-\infty, a)$, com $a > \sup K$. Neste caso, este conjunto sozinho cobre K . Por outro lado, se $\sup K \notin K$, então a família formada pelos conjuntos da forma $(-\infty, \sup K - \frac{1}{n})$ é uma cobertura aberta de K sem subcobertura finita.

9.3.6 Para ver que uma aplicação contínua sempre atinge o máximo, basta notar que $f(X)$ é um conjunto compacto, e que pelo Exercício 9.3.5, $\sup f(X) \in f(X)$.

Para um contraexemplo, faça $X = (0, 1]$ também com a topologia do Exercício 9.3.5. Então, id é contínua, X é compacto pelo Exercício 9.3.5, mas id não atinge o mínimo.

9.3.7 Para cada $a \in \mathbb{R}$, os conjuntos da forma $[a, a + \varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$ formam uma base de vizinhanças de a . Portanto, $x_n \xrightarrow{\tau} x$ exatamente quando para todo $\varepsilon > 0$, existir N tal que $n \geq N \Rightarrow x_n \geq x$ e $x_n - x < \varepsilon$.

9.3.8 Como a topologia usual é gerada por conjuntos da forma (a, b) , basta mostrar que esses conjuntos estão em τ . Mas de fato,

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b \right).$$

9.4.1 Considere as projeções $\pi_1(x, y) = x$ e $\pi_2(x, y) = y$. Como são contínuas, $\pi_1(K)$ e $\pi_2(K)$ são compactos de \mathbb{R} . Além disso, $K \subset \pi_1(K) \times \pi_2(K)$.

9.4.2 O conjunto vazio. Os compactos de \mathbb{R}^n são fechados pelo Teorema 9.19. Os únicos conjuntos que são abertos e fechados ao mesmo tempo são \emptyset e \mathbb{R}^n . Desses, o único limitado é \emptyset , que é evidentemente compacto.

9.5.1 TODO: envie sua resposta para topologia-geral-discussion@lists.ourproject.org

9.5.2 TODO: envie sua resposta para topologia-geral-discussion@lists.ourproject.org

9.5.3 Ser ou não completo não é uma propriedade topológica. O Exercício 9.5.2, por exemplo, mostra um espaço topológico que em uma métrica é completo, e na outra, não.

9.5.4 TODO: envie sua resposta para topologia-geral-discussion@lists.ourproject.org

9.5.5 Para todo k , x está em F_k , que é o fecho de $\{x_n \mid n \geq k\}$. Assim, toda bola centrada em x intersepta o conjunto $\{x_n \mid n \geq N\}$. Ou seja, podemos tomar n_k como indicado, e ainda por cima, $n_k \geq k \rightarrow \infty$.

9.5.6 Queremos construir uma subsequência. Para que seja subsequência, é necessário que $n_k \rightarrow \infty$. Caso contrário, corremos o risco, por exemplo, de ter $x_1 = x$ e construirmos uma “subsequência” constante x_1, x_1, x_1, \dots , que não tem nenhuma relação com o comportamento de x_n quando $n \rightarrow \infty$.

9.5.7 Seja

$$F_N = \overline{\{x_n \mid n \geq N\}}.$$

Os conjuntos F_N formam uma seqüência decrescente de fechados não vazios. Pela compacidade de X , sabemos que o limite $F = \bigcap_{N=1}^{\infty} F_N$ não pode ser vazio. Portanto, existe $x \in F$.

Seja $\mathcal{B}_x = \{B_n \mid k = 1, 2, \dots\}$ uma base enumerável de vizinhanças encaixantes de x (veja a Proposição 5.22). Escolha n_k tal que $x_{n_k} \in B_k$. Então, a seqüência x_{n_k} é uma subsequência de x_n que converge para x .

9.5.8 A resposta depende de como você resolveu o exercício. A essência da demonstração é a existência de uma base de vizinhanças encaixantes. Precisamos que para cada vizinhança V de um determinado ponto x , $x_n \in V$ para todo n suficientemente grande.

Quando tomamos vizinhanças encaixantes $B_n \supseteq B_{n+1}$ e escolhemos $x_{n_k} \in B_k$, então $x_{n_k} \in B_N$ para todo $k \geq N$, e não apenas para $k = N$.

Mas não adianta ter apenas vizinhanças encaixantes. É necessário que os tais B_n formem uma base de vizinhanças de algum ponto x . É essa condição que garante que dada uma vizinhança V qualquer de x se tenha N tal que

$$k \geq N \Rightarrow x_{n_k} \in B_N \subset V.$$

9.5.9 Este [post](http://math.stackexchange.com/questions/152447/compactness-sequentially-compact) <http://math.stackexchange.com/questions/152447/compactness-sequentially-compact> tem exemplos de compactos que não são sequencialmente compactos e vice-versa!

9.6.1 Se $y \in X$ é diferente de x , então existe uma vizinhança V de y e uma vizinhança U de x tais que $V \cap U = \emptyset$. Em particular, $x \notin V$. Ou seja, $\{x\}^c$ é aberto.

9.6.2 Tome um conjunto X qualquer com mais de um elemento. A topologia $\{\emptyset, X\}$ é tal que nenhum conjunto unitário é fechado.

9.6.3 É evidente que $x \in V$ para todo $V \in \mathcal{V}(x)$, portanto, a inclusão \subset é clara. Por outro lado, se $y \notin \{x\}$, então existe $V \in \mathcal{V}(x)$ e $U \in \mathcal{V}(y)$ tais que $U \cap V = \emptyset$. Em especial, $y \notin V$. Portanto, $y \notin \bigcap \mathcal{V}(x)$.

9.6.4 Se $\mathcal{V}(x)$ é finito, então $\bigcap \mathcal{V}(x)$ é uma vizinhança de x . Pelo Exercício 9.6.3, $\{x\}$ é uma vizinhança de x . Ou seja, $\{x\}$ é aberto.

9.6.5 É evidente que $x \in \bar{V}$ para todo $V \in \mathcal{V}(x)$, portanto, a inclusão \subset é clara. Por outro lado, se $y \notin \{x\}$, então existe $V \in \mathcal{V}(x)$ e $U \in \mathcal{V}(y)$ tais que $U \cap V = \emptyset$. Em especial, $y \notin \bar{V} \subset U^c$.

9.6.6 Definição alternativa:

Dados dois pontos distintos $x, y \in X$, existem abertos disjuntos A e B , com $x \in A$ e $y \in B$.

É evidente que um tal espaço é Hausdorff de acordo com a Definição 9.29. Por outro lado, se existem $U \in \mathcal{V}(x)$ e $V \in \mathcal{V}(y)$ disjuntos, então, basta tomar $A = \overset{\circ}{U}$ e $B = \overset{\circ}{V}$.

9.6.7 A aplicação identidade $\text{id} : (X, \tau_c) \rightarrow (X, \tau_h)$ é uma bijeção contínua, pois $\tau_h \subset \tau_c$. Pela Proposição 9.34, é um homeomorfismo. Ou seja, $\tau_h = \tau_c$.

9.6.8 O conjunto X é compacto Hausdorff com a topologia produto. A topologia produto é estritamente mais fraca que a topologia considerada. Pela rigidez compacto-Hausdorff, nessa topologia, X não pode ser compacto.

9.6.9 É imediato da nossa definição de fechado e de fecho: Definições 6.1 e 6.6. É fechado se, e somente se nenhum y diferente de x está no fecho. E y não está no fecho quando existe $V \in \mathcal{V}(y)$ tal que $x \notin V$.

9.6.10 Tome $X = \{x, y\}$ com a topologia $\tau = \{\emptyset, X, \{x\}\}$.

9.7.1 Se $X \in \mathcal{V}$, então $\{X\} \subset \mathcal{V}$ é uma subcobertura finita.

9.7.2 Usamos o fato de que $V \in \mathcal{B}$ pode ser escrito da forma

$$V = V_1 \cap \dots \cap V_n$$

para $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{S}$, com $n \geq 1$. Mas isso não é verdade quando $V = X$. De fato, X é o único conjunto de \mathcal{B} que pode não ser da forma $V_1 \cap \dots \cap V_n$.

9.7.3 Se $\mathcal{U}_j \subset \mathcal{V}_j$ é uma subcobertura finita, então, $\mathcal{U}_j \setminus \{V_j\}$ cobre $X \setminus V_j$. Portanto,

$$\bigcup_{j=1}^n (\mathcal{U}_j \setminus \{V_j\})$$

cobre

$$\bigcup_{j=1}^n (X \setminus V_j) = X \setminus (V_1 \cap \dots \cap V_n).$$

Ou seja,

$$\{V\} \cup \bigcup_{j=1}^n (\mathcal{U}_j \setminus \{V_j\}) = \{V_1 \cap \dots \cap V_n\} \cup \bigcup_{j=1}^n (\mathcal{U}_j \setminus \{V_j\})$$

é uma subfamília finita de \mathcal{U} e cobre X .

9.7.4 Na demonstração, como $b \in \bigcup \mathcal{U}$, podemos concluir que existe $x > b$ tal que $(-\infty, x) \in \mathcal{U}$. Mas se o intervalo é da forma $[a, b)$, não podemos ter certeza de que b é coberto pela família \mathcal{U} .

9.8.1 Sabemos que espaços discretos são compactos se, e somente se, são finitos. Pelo Teorema 9.41, $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ é compacto. Como também é infinito, não pode ser discreto.