Topologia Geral de Vários Ângulos

André Caldas de Souza
and YOU! :-)

16 de maio de 2010

Este Livro é Livre

Este livro pode ser copiado à vontade. Se você recebeu em formato digital, fique à vontade para copiá-lo e comparilhá-lo quantas vezes quiser. Você pode também imprimí-lo e copiá-lo o tanto que quiser. Claro que é sempre importante pensar na natureza e no impacto ambiental. Procure não desperdiçar recursos. ;-)

Quer imprimir e vender este livro para os seus colegas? Fique à vontade, também! Você é dono de uma editora e quer imprimir sua própria versão, vender e ficar rico com esse livro sem precisar pagar nenhum tostão em direitos autorais? Pois na minha opinião, se você o fizer estará contribuindo para um mundo melhor. Uma das poucas restrições é que você não tire dos outros essa liberdade que lhe foi concedida. Se você passar esse livro pra frente, não poderá proibir aquele que o recebeu de fazer o mesmo.

A versão mais atual deste livro pode ser encontrada na internet no endereço
`http://ourproject.org/projects/topologia-geral/`.
Neste endereço também podem ser encontrados os arquivos LaTeX, que podem ser alterados e usados para criar sua própria versão do livro.

Sobre o OurProject.org

O site onde está hospedado o projeto deste livro é um repositório de conteúdos livre. Qualquer um que queira produzir conteúdos livres – como livros, poesias, músicas, vídeos e etc. – pode utilizá-lo como ferramenta. Ah. . . o site sobrevive com doações. ;-)

Endereço: `http://ourproject.org/`

Faz algum tempo que eu procurava um lugar que pudesse hospedar o projeto de um livro livre. Já estava pensando em tentar fazer alguma coisa nesse estilo dentro do próprio departamento de matemática da UnB. Felizmente encontrei o OurProject e isso não será mais necessário.

Como Ajudar?

A melhor maneira de ajudar, é repassando este livro para o maior número de pessoas! Quanto mais pessoas tiverem interesse no livro, maiores serão as chances de se atingir um bom nível de qualidade. Sugestões, correções ou contribuições podem ser enviadas para o e-mail topologia-geral-discussion@lists.ourproject.org. Ainda não sei quão aberto a sugestões estou disposto a ser. No entanto, você é livre para, respeitando os termos da licença, criar sua própria versão e incluir seu próprio conteúdo. Os arquivos que compõem o projeto deste livro podem ser baixados do repositório SVN no endereço
`https://ourproject.org/scm/?group_id=914`.

Contribuindo com Figuras

Me falta um certo dom para criar figuras de qualidade. :-(

Se você puder contribuir com imagens, estas devem estar preferencialmente no formato SVG. O SVG foi adotado por ser um *padrão aberto* baseado em XML. O aplicativo que eu uso para criar figuras é *software livre* e chama-se *Inkscape*. A página do projeto *Inkscape* é
`http://www.inkscape.org/`.

Contribuindo com Código LaTeX

Os arquivos LaTeX devem seguir o mesmo tipo de formatação dos demais. Na medida do possível, o arquivo LaTeX não deve conter “gambiarras” ou comandos de formatação explícitos no meio do texto.

Os arquivos do projeto contém várias linhas com comentários explicando o que falta ser feito. Basta procurar pela palavra TODO (a fazer).

Por Quê?

Eu (André Caldas) NÃO acredito que "coletar taxas" seja a melhor maneira de se sobreviver da produção cultural. Na minha opinião, as pessoas devem receber para produzir, e não produzir na esperança de que vão "coletar taxas" relativas ao direito autoral para o resto da vida. Eu, por exemplo, atualmente sou estudante de doutorado da UnB e recebo uma bolsa de estudo da CAPES. Apesar de a bolsa não cobrir os custos para a produção deste livro, foi esta mesma bolsa que viabilizou que eu pudesse deixar o meu emprego para me dedicar às minhas atividades acadêmicas. Ou seja, a sociedade já me oferece meios para que eu possa me dedicar às minhas atividades acadêmicas, e estas incluem a produção deste livro. :-)

Não vejo sentido em um professor de uma universidade pública, que já recebe um salário do governo para que produza conhecimento, ter monopólios sobre o fruto do seu trabalho. Vejo menos sentido ainda quando esse professor vende tal monopólio para ser explorado. Perceba que isso não é uma crítica ao lucro ou à exploração da produção científica. É uma crítica ao monopólio sobre os direitos de uso daquilo que foi produzido com dinheiro público. Não faz sentido que a sociedade faça esse tipo de investimento e depois não possa ter acesso ao que foi produzido. Livros é o menor dos problemas. Vemos que pesquisas para o desenvolvimento de medicamentos ou qualquer outra coisa que vá melhorar a qualidade de vida da população, como melhoria na alimentação e acesso ao lazer, são feitas com dinheiro público em parceria com instituições privadas de modo que a sociedade acaba sendo privada de seus frutos. Não acredito que seja errado fazer parceria com instituições privadas. O que não se pode é privar a sociedade dos frutos do trabalho no qual investiu. Vemos instituições de pesquisa se valerem de recursos públicos durante as pesquisas e depois correrem atrás de registros de patentes e coisas do tipo que servem apenas ao propósito de privar a sociedade dos frutos dessa mesma pesquisa.

Se o governo, por exemplo, a uns 10 anos atrás tivesse começado a financiar a produção de livros e exigisse que o fruto desse trabalho fosse verdadeiramente livre (como é este livro), hoje não faríamos licitações para a "compra" de livros; faríamos uma licitação para a impressão e a distribuição desses livros. Falta visão de longo prazo. Deveríamos investir na produção de livros livres. O autor deve sim receber por seu trabalho. Só que deve receber enquanto faz o trabalho, e não depois através do recolhimento de taxas e de mecanismos de opressão, como os que apreendem máquinas de fotocópia nas universidades.

Tenho vários amigos que fazem cópias de muitos livros. Sempre lembro a eles que quando virarem autores não devem “virar a casaca” e começar a perseguir os que fazem cópias. Gostaria de fazer o mesmo pedido ao leitor! :-)

Brasília, 23 de abril de 2010,
André Caldas

Prefácio

Os livros que tratam do assunto *topologia* parecem se dividir em duas categorias:

- Começam com definições abstratas e pouco motivadas.
- Tratam *apenas* de espaços métricos.

Os espaços métricos são sem dúvida a melhor motivação para o estudo da *topologia geral*. No entanto, existem muitos conceitos, como os de *sequência de Cauchy*, *espaço completo* e *continuidade uniforme*, que não são conceitos topológicos. O que acontece é que os textos que tratam de topologia dos espaços métricos dão muita ênfase a esses conceitos, à *equivalência de métricas*, ao *completamento de espaços*, à *metrizabilidade de uma topologia*, e por aí vai. O fato é que dessa forma não se tem um curso de *topologia*, tem-se um curso de *espaços métricos*.

Por outro lado, sem falar de espaços métricos é muito difícil dar alguma motivação para o que venha a ser uma *topologia*. Assim, neste livro o que foi feito foi uma introdução rápida aos espaços métricos sem se fazer nenhuma menção a questões que não fossem puramente topológicas. Falamos de bolas, de convergência e de continuidade. A idéia é a de se fazer uma transição entre as formulações que enfatizam mais a métrica do espaço até chegar a formulações que dependam apenas da topologia.

Um outro diferencial deste livro está na busca por maneiras alternativas de se olhar para os fenômenos topológicos. Em geral os conjuntos abertos recebem atenção demasiada. Por exemplo, quando estudamos análise funcional, estamos bastante interessados na continuidade de operadores lineares em topologias que são invariantes por translações. Neste caso a continuidade se resume à continuidade na origem. Quando consideramos a continuidade em um único ponto do espaço, a preocupação em demonstrar que determinados conjuntos são *abertos* é um exagero desnecessário. Deveríamos nos preocupar se são ou não *vizinhanças* de 0. A intenção é que o leitor consiga identificar maneiras alternativas que melhor se adaptem ao fenômeno que está sendo analisado. Para um determinado caso, talvez o melhor seja considerar *abertos*, talvez *vizinhanças*, *redes*, *sequências*, *fechados*, *filtros* e etc.

Sumário

Parte I

Espaços Métricos

Capítulo 1

Definição e Propriedades

Vamos descrever (definir) o que se entende por *espaço métrico* (definição 1.1.1), e estudar propriedades desses espaços que nos motivarão a definir o conceito mais geral de espaço topológico (definição 4.2.1).

Os conhecimentos adquiridos neste capítulo serão importantes para que o leitor possa ter exemplos concretos e também motivação suficiente para reconhecer a utilidade e aceitar com naturalidade os conceitos que serão apresentados nos capítulos seguintes.

1.1 Definição

Um espaço topológico é um conjunto X, munido de uma métrica $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$. A métrica faz com que esteja definida uma noção de *distância* entre os pontos de X.

Definição 1.1.1 (Métrica)**.** *Seja X um conjunto qualquer. Uma* métrica *definida sobre X é uma função*

$$\begin{array}{rccc} d: & X \times X & \to & \mathbb{R}^+ \\ & (x, y) & \mapsto & d(x, y) \end{array}$$

que, para todo $x, y, z \in X$, satisfaz

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. *(desigualdade triangular)*

Dizemos que (X, d) *é um* espaço métrico. *Em geral, por um abuso de linguagem, quando a métrica* d *está subentendida, dizemos que* X *é um espaço métrico.*

Em $\mathbb{R}^n$, a métrica usualmente adotada é a métrica euclidiana, dada por

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2}. \tag{1.1}$$

Onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Em várias situações, o item (1) da definição de métrica, nos permitirá concluir que dois pontos $x, y \in X$ são de fato o mesmo ponto. Basta mostrar que $d(x, y) = 0$. O item (3) é o mais importante da definição. É este item que abstrai a idéia de que a distância entre dois pontos está intimamente relacionada com o "menor caminho" entre dois pontos:

> Se existe um caminho A, partindo de x e indo para y, e um caminho B, partindo de y e indo para z, então, a menor distância (ou o ínfimo dos comprimentos dos caminhos partindo de x e indo para z) não é maior do que a soma dos comprimentos de A e B. (figura 1.1)

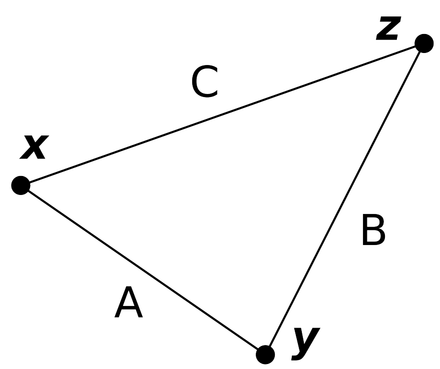

Figura 1.1: Desigualdade triangular: $C \leq A + B$.

Definição 1.1.2 (Bola)**.** *Seja* (X, d) *um espaço métrico,* $x \in X$ *e* $\varepsilon > 0$. *A* bola *de centro* x *e raio* ε *é o conjunto de todos os pontos que distam menos que* ε *de* x*:*

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}.$$

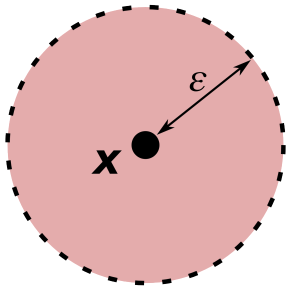

Figura 1.2: A bola de centro x e raio ε.

1.2 Propriedades Elementares

Nesta seção, (X, d) é um espaço métrico. As propriedades mais interessantes dos espaços métricos são conseqüência da desigualdade triangular. Muitas vezes, essas propriedades são mais fáceis de serem visualizadas quando consideramos a distância euclidiana em $\mathbb{R}^2$. Ou seja, quando fazemos um desenho em uma folha de papel. É importante enfatizar que no entanto, os resultados dependem apenas das propriedades das métricas (definição 1.1.1). O desenho melhora a intuição, mas não é uma demonstração.

Todas as proposições deste capítulo são muito simples. O leitor deve ser capaz de completar as demonstrações que afirmam, por exemplo, que basta tomar um certo δ para concluir a demonstração.

Proposição 1.2.1. *Sejam $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$B_{\frac{1}{n}}(x) \subset B_\varepsilon(x).$$

Demonstração. Basta tomar n grande o suficiente para que $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$. □

A seguinte proposição, apesar de muito simples, é fundamental para o desenvolvimento de toda a teoria que se seguirá, e é conseqüência direta da desigualdade triangular.

Proposição 1.2.2. *Sejam $x \in X$, $\varepsilon > 0$ e*

$$y \in B_\varepsilon(x).$$

Então, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_\delta(y) \subset B_\varepsilon(x).$$

Veja a figura 1.3.

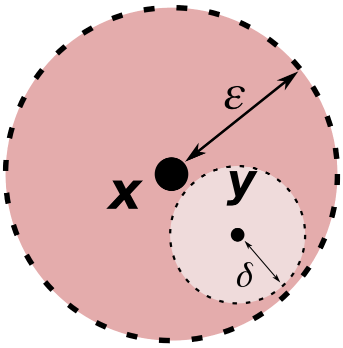

Figura 1.3: Para cada ponto y da bola $B_\varepsilon(x)$, temos uma "bolinha" centrada em y e toda contida em $B_\varepsilon(x)$.

Demonstração. Basta tomar $\delta < \varepsilon - d(x, y)$. Neste caso,

$$\begin{aligned} z \in B_\delta(y) &\Rightarrow d(y, z) < \delta \\ &\Rightarrow d(x, z) < d(x, y) + \delta < \varepsilon \\ &\Rightarrow z \in B_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

□

Proposição 1.2.3. *Sejam $x_1, x_2 \in X$, e $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Então, dado $z \in B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap B_{\varepsilon_2}(x_2)$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$B_\delta(z) \subset B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap B_{\varepsilon_2}(x_2).$$

Veja a figura 1.4.

Demonstração. Pela proposição 1.2.2, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} B_{\delta_1}(z) &\subset B_{\varepsilon_1}(x_1) \\ B_{\delta_2}(z) &\subset B_{\varepsilon_2}(x_2). \end{aligned}$$

Basta portanto tomar qualquer $\delta \leq \min(\delta_1, \delta_2)$. □

Repare que a proposição "vale" para qualquer número finito de bolas $B_{\varepsilon_1}(x_1), \ldots, B_{\varepsilon_n}(x_n)$. Mas não "vale" para um número infinito de bolas.

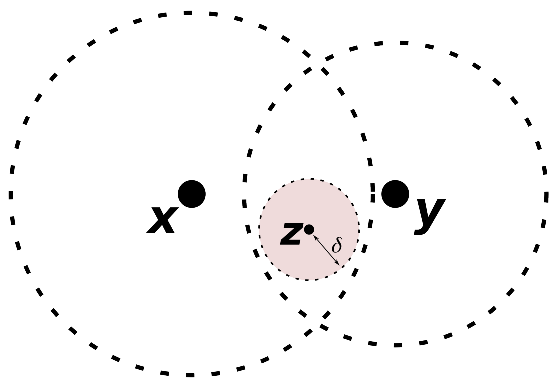

Figura 1.4: Para cada ponto z da interseção $B_{\varepsilon_1}(x) \cap B_{\varepsilon_2}(y)$, temos uma "bolinha" centrada em z e toda contida na interseção.

Proposição 1.2.4. *Sejam $x, y \in X$ dois pontos distintos de X. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset.$$

Veja a figura 1.5.

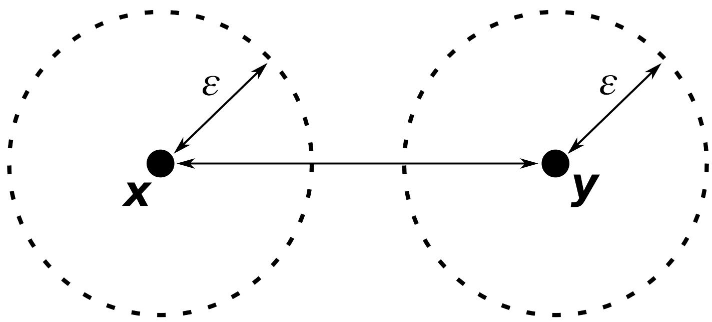

Figura 1.5: Dois pontos distintos x e y podem ser "separados" por bolas disjuntas.

Demonstração. Como $x \neq y$, temos que $d(x, y) > 0$. Basta tomar

$$\varepsilon \leq \frac{d(x, y)}{2}.$$

□

Proposição 1.2.5. *Seja $x \in X$. Então,*

$$\bigcap_{\varepsilon>0} B_\varepsilon(x) = \{x\}.$$

Demonstração. Basta mostrar que dado $y \in X$ com $y \neq x$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$y \notin B_\varepsilon(x).$$

Isso segue como um caso particular da proposição 1.2.4. □

1.3 Exemplos

Exemplo 1.3.1 (Métrica Usual dos Reais)**.** Considere o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. A seguinte métrica é a métrica usual dos números reais:

$$d(x, y) = |y - x|.$$

O espaço $(\mathbb{R}, d)$ é um espaço métrico.

Exemplo 1.3.2 (Métrica Discreta)**.** Seja X um conjunto qualquer. Então, se definirmos a *métrica discreta* em X por

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

Exemplo 1.3.3 (Métrica Euclidiana de $\mathbb{R}^n$)**.** Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Agora, defina

$$d(x, y) = \|y - x\|,$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana de $\mathbb{R}^n$. O espaço $(\mathbb{R}^n, d)$ é um espaço métrico. Além do mais, possui as seguintes propriedades:

1. Para todo $a, x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x + a, y + a) = d(x, y)$.

2. Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$.

Poderíamos ter feito o mesmo para $\mathbb{C}^n$.

Exemplo 1.3.4 (Os Complexos e o $\mathbb{R}^2$)**.** Podemos identificar um número complexo $z = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ com o elemento $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Assim, usando a métrica euclidiana de $\mathbb{R}^2$, obtemos a métrica

$$d(\alpha_1 + \beta_1 i, \alpha_2 + \beta_2 i) = \sqrt{(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2 - \beta_1)^2}.$$

Exemplo 1.3.5 (Identificando Dois Conjuntos)**.** O que fizemos no exemplo 1.3.4, poderia ter sido feito para qualquer injeção. Se (X, d) é um espaço métrico, e $f : Y \to X$ é uma injeção partindo de um conjunto qualquer Y, então podemos definir a seguinte métrica no conjunto Y:

$$d(y_1, y_2) = d(f(y_1), f(y_2)).$$

Exemplo 1.3.6 (Restrição a um Subconjunto)**.** Seja (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$. Então, $(A, d|_{A\times A})$ é também um espaço métrico. De fato, esta construção é exatamente o que foi feito no exemplo 1.3.5 onde a identificação entre A e X é a identidade:

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id}: & A & \to & X \\ & a & \mapsto & a \end{array}.$$

Exemplo 1.3.7. Seja X um conjunto qualquer. Denote por F o conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{R}$. A seguinte função NÃO é uma métrica em F:

$$d(f, g) = \sup_{x\in X} |g(x) - f(x)|.$$

Isso porque é possível que $d(f, g) = \infty$. No entanto, se considerarmos o conjunto $F' = \{f \in F \mid d(f, 0) < \infty\}$, onde 0 representa a função constante de valor 0, então $(F', d|_{F'})$ é um espaço métrico. Note que poderíamos ter usado qualquer outra função no lugar de 0.

Sempre podemos fazer isso quando uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ satisfaz, com exceção da possibilidade de assumir o valor ∞, as condições para ser uma métrica. Esse artifício é utilizado por exemplo, em análise funcional, quando se estudam os chamados espaços L^p. É importante notar que a função $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ está bem definida. Apenas não é uma métrica se assumir o valor ∞.

Capítulo 2

Topologia Usando uma Métrica

Vamos ver como a métrica (distância) é utilizada para descrever aspectos topológicos dos espaços métricos. Veremos como uma métrica é utilizada para descrever *convergência de seqüências* (definição 2.1.1), *continuidade de funções* (definição 2.2.2 e proposição 2.3.2).

Neste capítulo, (X, d) é um espaço métrico.

2.1 Seqüências e Convergência

Seja $n \in \mathbb{N}$. A sequência de pontos $x_n = \frac{1}{n}$ é tal que, *"na medida que n se torna suficientemente grande, a sequência x_n se aproxima de 0"*. Nesta sessão, vamos formalizar o que entendemos por:

> Na medida que n se torna suficientemente grande, $\frac{1}{n}$ se aproxima de 0.

Para um espaço métrico X, a noção de "se aproxima de" é um tanto quanto natural, já que temos uma métrica que nos dá uma noção de distância. A grosso modo, $x_n \in X$ se aproxima de x quando a distância entre x_n e x, $d(x_n, x)$, se aproxima de 0. Faltaria então definir o que significa dizer que a sequência de números reais $d(x_n, x)$ "se aproxima" de 0.

Definição 2.1.1 (Convergência). *Seja $x_n \in X$ $(n \in \mathbb{N})$. Dizemos que x_n converge para um certo $x \in X$, e denotamos tal fato por $x_n \to x$, quando para todo $\varepsilon > 0$, existir $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Também dizemos que x é o limite da sequencia x_n e escrevemos $x = \lim x_n$.

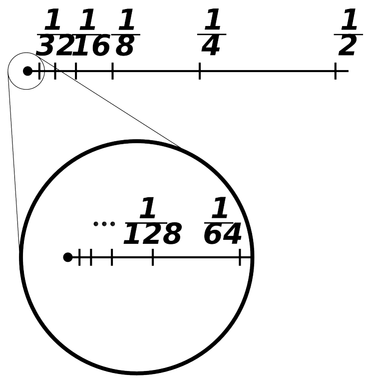

Figura 2.1: A sequência $\frac{1}{2^n}$ "se aproxima" de 0.

Também escrevemos $x_n \xrightarrow{d} x$, quando queremos enfatizar que a convergência é dada pela métrica d.

A definição 2.1.1 generaliza o que já fazemos para os números reais. No caso dos números reais, usualmente adotamos a métrica $d(x, y) = |y - x|$.

Definição 2.1.2 (Convergência usual em $\mathbb{R}$)**.** *Seja $\alpha_n \in \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$). Dizemos que α_n converge para $\alpha \in \mathbb{R}$, e denotamos tal fato por $\alpha_n \to \alpha$, quando para todo $\varepsilon > 0$, existir $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq N \Rightarrow |\alpha - \alpha_n| < \varepsilon.$$

Poderíamos ter tomado um outro caminho. Já de posse da definição 2.1.2, poderíamos ter definido convergência em espaços métricos de acordo com a seguinte proposição.

Proposição 2.1.3. *Seja $x_n \in X$ uma sequencia. Faça $d_n = d(x_n, x)$. Então*

$$x_n \to x \Leftrightarrow d_n \to 0.$$

Onde a convergência do lado direito é dada pela definição 2.1.2 ou, equivalentemente, pela métrica euclidiana em $\mathbb{R}$.

Demonstração. É evidente, pois $d(x_n, x) \to 0$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

□

Proposição 2.1.4. *Seja $x_n \in X$ uma sequencia e $x \in X$. Então são equivalentes:*

1. *A sequência converge: $x_n \to x$.*
2. *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow x_n \in B_\varepsilon(x)$.*
3. *Para todo $m \in \mathbb{N}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow x_n \in B_{\frac{1}{m}}(x)$.*

Demonstração. A equivalência entre os itens (2) e (3) segue da proposição 1.2.1.

Para a equivalência entre (1) e (2), basta notar que $x_n \in B_\varepsilon(x) \Leftrightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$, e então fazer a substituição na definição 2.1.1. $\square$

Definição 2.1.5 (Métricas topologicamente equivalentes)**.** *Enquanto não definimos o que é uma topologia, vamos dizer que duas métricas d_1 e d_2 sobre X determinam a mesma topologia (são* topologicamente equivalentes*) quando*

$$x_n \xrightarrow{d_1} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{d_2} x.$$

O objetivo da primeira parte deste livro é o de dar motivação para os conceitos de topologia geral que serão apresentados na segunda parte. A este propósito serve a proposição 2.1.4, que apresenta maneira alternativas de se olhar para a convergência de sequencias em espaços métricos. Na medida em que substituímos a métrica $d(x_n, x)$ pela bola $B_\varepsilon(x)$, as formulações ficam mais parecidas com suas correspondentes para espaços topológicos gerais

2.2 Continuidade

Olhando para o gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na figura 2.2, você diria que f é contínua em a?

De que modo podemos expressar formalmente o significado de f ser ou não contínua em a? Note que no exemplo da figura 2.2,

$$f\left(a + \frac{1}{n}\right) \to 2 \neq f(a).$$

Muitos expressam esse fato dizendo que f tem um "salto" em a.

Definição 2.2.1. *Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos. Dizemos que $f : X \to Y$ é contínua em $a \in X$ quando*

$$a_n \to a \Rightarrow f(a_n) \to f(a).$$

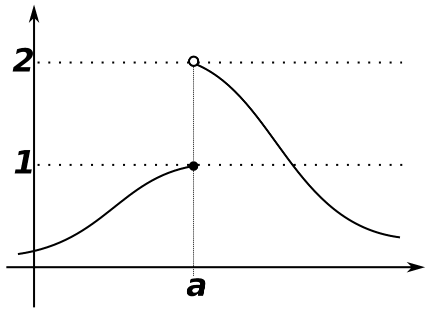

Figura 2.2: Como formular matematicamente que f é descontínua em a?

Definição 2.2.2. *Sejam* (X, d_X) *e* (Y, d_Y) *espaços métricos. Dizemos que* $f : X \to Y$ *é contínua quando for contínua em todo ponto* $a \in X$*.*

Notação. *Também escrevemos* $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ *para indicar que estamos considerando os espaços métricos* (X, d_X) *e* (Y, d_Y)*, e que* f *é uma função de* X *em* Y*.*

Observação 2.2.3. A continuidade depende apenas da "topologia" dos espaços considerados. Se $f : X \to Y$ é contínua quando considerados os espaços métricos (X, d_X) e (Y, d_Y), então será contínua nos espaços (X, d'_X) e (Y, d'_Y) sempre que as métricas d_X e d_Y forem equivalentes a d'_X e d'_Y, respectivamente.

2.3 Topologia com Bolas

Até o presente momento, temos trabalhado com sequências. Nesta seção vamos formular os mesmos conceitos utilizando bolas. Para que a transição entre sequências e bolas seja suave, vamos começar reavaliando a proposição 2.1.4.

A proposição afirma que dizer que x_n converge para x é o mesmo que dizer que toda bola centrada em x contém todos os x_n, exceto talvez para uma quantidade finita de índices n. Note que na proposição 2.1.4 falávamos em "para todo $\varepsilon > 0$", mas isso é o mesmo que dizer "para toda bola"!

Resumindo o que já havia sido feito, temos a seguinte caracterização para a convergência de uma sequência.

Proposição 2.3.1. *Seja X um espaço métrico e $x_n \in X$ uma sequência de elementos de X. Então, x_n converge para $x \in X$ se, e somente se, para toda bola $B_\varepsilon(x)$ centrada em x, existir $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in B_\varepsilon(x).$$

Demonstração. Veja a proposição 2.1.4. □

Proposição 2.3.2. *Sejam X e Y espaços métricos. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *A função $f : X \to Y$ é contínua em $a \in X$.*
2. *Para toda bola $B_{f(a)} = B_\varepsilon(f(a))$ centrada em $f(a)$, existe uma bola $B_a = B_\delta(a)$ centrada em a, tal que*

$$f(B_a) \subset B_{f(a)}.$$

3. *Para toda bola $B = B_\varepsilon(f(a))$ centrada em $f(a)$, $f^{-1}(B)$ contém alguma bola centrada em a.*

Demonstração. A equivalência entre os itens (2) e (3) é evidente, já que dizer que existe uma bola é o mesmo que dizer que existe $\delta > 0$.

Vamos mostrar que o item (3) implica na continuidade de f no ponto a de acordo com a definição 2.2.1. Seja $x_n \to a$. Vamos mostrar que $f(x_n) \to f(a)$. Tome uma bola qualquer B centrada em $f(a)$. Por hipótese, $f^{-1}(B)$ contém uma bola B_a centrada em a. Pela proposição 2.3.1, temos que $x_n \in B_a \subset f^{-1}(B)$ exceto para um número finito de índices n. Ou seja, $f(x_n) \in B$, exceto para um número finito de índices. O que pela proposição 2.3.1 é o mesmo que dizer que $f(x_n) \to f(a)$.

Suponha então que o item (3) não vale. Neste caso, existe uma bola B centrada em $f(a)$ tal que $f^{-1}(B)$ não contém nenhuma bola centrada em a. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolha $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a)$ tal que $f(x_n) \notin B$. A sequência x_n converge para a (por quê?), mas $f(x_n)$ não converge para $f(a)$ (por que?). □

Observação 2.3.3. Repare como o item 2 se assemelha à definição de continuidade que utiliza argumentos do tipo $\varepsilon - \delta$:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Capítulo 3

Topologia de Espaços Métricos: releitura

Neste capítulo, vamos fazer uma releitura do que estudamos no capítulo 2, mas desta vez, vamos tentar eliminar o máximo possível os argumentos do tipo "epsilon e delta". O objetivo é apresentar a topologia dos espaços métricos utilizando a métrica o mínimo possível, de modo a tornar a apresentação dos conceitos mais parecida com os conceitos correspondentes quando trabalhamos com a chamada *topologia geral* (definição 4.2.1).

O conceito mais importante e mais enfatizado nos cursos de topologia é o de *conjunto aberto* (definição 3.4.1). No entanto, o conceito de *vizinhança* (definição 3.1.1) é muito mais fundamental e mais natural, principalmente quando se faz o paralelo entre o ponto de vista da *topologia geral* e a topologia dos espaços métricos. O conceito de vizinhança é muito mais próximo e generaliza muito melhor o que se faz quando se utiliza argumentos com bolas, ou argumentos do tipo "epsilon e delta", muito comuns quando tratamos de espaços métricos.

3.1 Vizinhanças

Quando falamos de convergência e continuidade nos capítulos anteriores, estávamos de posse de uma métrica. A métrica nos dava a noção de distância que nos permitia falar de "proximidade". Quando dizemos que x_n converge para x, não estamos de fato interessado nos pontos que estão "longe" de x. Estamos interessados apenas nos que estão "próximos". De fato, poderíamos nos restringir apenas a bolas "pequeninas". Poderíamos nos restringir às bolas de raio $\frac{1}{100*n}$.

Quando x_n converge para x, é porque se V contém x e que é de certa forma *suficientemente grande*, conterá toda a sequência x_n, exceto para uma quantidade finita de índices n. Esse *suficientemente grande*, no caso de espaços métricos, significa que existe uma bola B centrada em x tal que $B \subset V$. A esses conjuntos *suficientemente grandes*, chamamos de *vizinhanças de x*.

Definição 3.1.1. *Seja X um espaço métrico e $x \in X$. Todo conjunto $V \subset X$ que contém uma bola centrada em x é chamado de* vizinhança de x. *Denotamos por $\mathcal{V}(x)$ o conjunto de todas as vizinhanças do ponto x.*

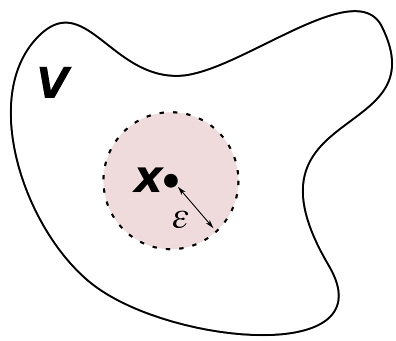

Figura 3.1: O conjunto V é uma vizinhança x pois é "grande" o suficiente para conter uma bola centrada em x.

É imediato que toda bola centrada em x é uma vizinhança de x. Mais do que isso, uma bola qualquer é vizinhança de todos os seus pontos.

Proposição 3.1.2. *Se $B \subset X$ é uma bola em um espaço métrico X. Então,*

$$y \in B \Rightarrow B \in \mathcal{V}(y).$$

Ou seja, uma bola é vizinhança de todos os seus pontos.

Demonstração. Veja a proposição 1.2.2. Ou, para um argumento mais visual, compare as figuras 1.3 e 3.1. □

A seguir, apresentamos algumas propriedades elementares das vizinhanças de um ponto.

Proposição 3.1.3. *Seja X um espaço métrico, e $x \in X$. Então valem as seguintes afirmações sobre a família $\mathcal{V}(x)$ de todas as vizinhanças de x:*

1. *Se $A \in \mathcal{V}(x)$ e $A \subset B$, então $B \in \mathcal{V}(x)$.*

2. *A interseção de duas vizinhanças de x também é uma vizinhança de x. Ou seja, se $A, B \in \mathcal{V}(x)$, então $A \cap B \in \mathcal{V}(x)$.*

3. *Se $A \in \mathcal{V}(x)$ então existe $B \subset A$ tal que $x \in B$ e B é vizinhança de todos os seus pontos.*

Demonstração. O item (1) é imediato.

O item (2) é imediato do fato que as bolas centradas em x são totalmente ordenadas. Ou seja, a que tiver o menor raio estará contida em ambos os conjuntos.

O item (3) é uma re-interpretação da proposição 3.1.2. Basta tomar B como sendo uma bola centrada em x contida em A. □

Observação 3.1.4. Das propriedades listadas na proposição 3.1.3, o item (3) é o de interpretação mais difícil. Vamos voltar a discutí-lo no capítulo ??. Uma das implicações do item (3), é a seguinte. Seja $V \in \mathcal{V}(x)$. Suponha que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenhamos uma sequência x_m^n, indexada por m, que converge para x_n. O item (3) da proposição implica que x_n não pode convergir para x, pois todos estarão fora do conjunto B.

Assim, sem a propriedade do item (3), aberrações do tipo

$$x_n^n \not\to x \qquad\qquad x_n \to x.$$

Quando na verdade esperamos que se $\lim x_n$ existe, então $x_n^n \to \lim x_n$.

3.2 Continuidade em um Ponto

Usando vizinhanças para expressar continuidade a formulação fica muito simples. O trabalho todo já foi feito na proposição 2.3.2.

Notação. *Seja X um conjunto. Chamamos de* partes de X, *e denotamos por $\mathcal{P}(X)$ a família formada por todos os subconjuntos de X.*

Se $f : X \to Y$ e $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(Y)$, escrevemos $f^{-1}(\mathcal{F})$ para indicar a família

$$f^{-1}(\mathcal{F}) = \left\{ f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{F} \right\}.$$

Proposição 3.2.1. *Sejam X e Y espaços métricos. Então $f : X \to Y$ é contínua em $a \in X$ se, e somente se,*

$$f^{-1}(\mathcal{V}(f(a))) \subset \mathcal{V}(a).$$

Demonstração. Tome $V \in \mathcal{V}(f(a))$. Então existe uma bola B centrada em $f(a)$, tal que $B \subset V$. Pela proposição 2.3.2, $f^{-1}(B) \in \mathcal{V}(a)$. Portanto, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$.

Por outro lado, se $f^{-1}(\mathcal{V}(f(a))) \subset \mathcal{V}(a)$, teremos que em particular $f^{-1}(B) \in \mathcal{V}(a)$ para toda bola centrada em $f(a)$. Ou seja, $f^{-1}(B)$ contém uma bola centrada em a para toda bola B centrada em $f(a)$. Novamente, pela proposição 2.3.2, isso implica que f é contínua em a. □

Em se tratando de espaços métricos, tanto a definição 2.2.1, quanto qualquer uma de suas formulações equivalentes dadas pelas proposições 2.3.2 e 3.2.1, poderiam ser utilizadas como a definição de continuidade em um ponto. Poderíamos ter escolhido um caminho diferente e adotado uma definição de continuidade no estilo

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Cada caracterização enfatiza um aspecto diferente do fenômeno de continuidade. É importante que não nos acomodemos a apenas uma delas, mas que escolhamos a mais adequada à situação.

3.3 Base de Vizinhanças

Quando definimos o que seriam as vizinhanças de um ponto $x \in X$ de um espaço métrico, utilizamos as bolas centradas em x. Chamando de $\mathcal{B}$ a família das bolas centradas em x, temos que

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{V}(x).$$

Além do mais, todo conjunto $V \in \mathcal{V}(x)$ contém um conjunto $B \in \mathcal{B}$. Ou seja, a sub-família $\mathcal{B}$ determina quais são as vizinhanças de x. Poderíamos ter nos restringido às bolas de raio $\frac{1}{n}$ para compor a família $\mathcal{B}$. As vizinhanças *"geradas"* por essa nova família $\mathcal{B}$ seriam exatamente as mesmas.

Definição 3.3.1. *Seja $\mathcal{V}(x)$ a família de todas as vizinhanças de $x \in X$, onde X é um espaço métrico. Então, dizemos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}(x)$ é uma* base de vizinhanças de x *quando*

$$\mathcal{V}(x) = \{V \subset X \mid \exists B \in \mathcal{B},\ com\ B \subset Y\}$$

Proposição 3.3.2. *Seja X um espaço métrico e $x \in X$. Seja também $\mathcal{B}$ uma base de vizinhanças de x. Então, uma sequência x_n converge para x se, e somente se, para todo $B \in \mathcal{B}$ existir $N = N(B) \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in B.$$

Demonstração. É óbvio que se existe tal $N = N(B) \in \mathbb{N}$ para todo $B \in \mathcal{B}$, então para $V \in \mathcal{V}(x)$, podemos tomar $N(V) = N(B)$ para qualquer $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset V$. Será verdadeiro que

$$n \geq N(V) = N(B) \Rightarrow x_n \in B \subset V.$$

Portanto, $x_n \to x$. □

Proposição 3.3.3. *Sejam X e Y espaços métricos e $f : X \to Y$. Sejam $a \in X$ e $\mathcal{B}$ uma base de vizinhanças de $f(a)$. Então, f é contínua em a se, e somente se,*

$$f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{V}(a).$$

Demonstração. Pela proposição 3.2.1, basta mostrar que

$$f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{V}(a) \Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{V}(f(a))) \subset \mathcal{V}(a).$$

Uma direção é óbvia, já que $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}(f(a))$. Suponha então que $V \in \mathcal{V}(f(a))$. Neste caso, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset V$. Assim, $f^{-1}(V) \supset f^{-1}(B) \in \mathcal{V}(a)$. Portanto, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$. □

A aplicação mais imediata da proposição é a equivalência entre as seguintes afirmações, que são definições alternativas para a continuidade de f no ponto a:

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x, a) < \frac{1}{m} \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \frac{1}{n}.$$

3.4 Conjuntos Abertos

Um conjunto aberto simplesmente um conjunto que é vizinhança de todos os seus pontos. A proposição 1.2.2 mostra que em um espaço métrico, todas as bolas são abertas. Por isso, muitos autores usam a expressão *bola aberta* para se referirem ao que neste livro definimos como *bola*. Ainda vamos formalizar isso melhor, mas oss conjuntos abertos caracterizam toda a topologia do espaço, haja visto que a família

$$\mathcal{A}_x = \{V \in \mathcal{V}(x) \mid V \text{ é aberto}\}$$

é uma base de vizinhanças de x para todo $x \in X$. (veja o item (3) da proposição 3.1.3)

Conhecendo todos os conjuntos abertos, sabemos quem são as sequências convergentes, quais funções são ou não contínuas e, conforme já mencionado, quais são as vizinhanças de um ponto.

Definição 3.4.1. *Seja X um espaço métrico. Dizemos que um conjunto $A \subset X$ é aberto quando satisfaz*

$$x \in A \Rightarrow A \in \mathcal{V}(x).$$

Definição 3.4.2. *Dado um espaço métrico (X, d), a* topologia de X induzida por d*, denotada por τ_X é a família de todos os abertos de X. Isto é,*

$$\tau_X = \{A \subset X \mid A \textit{ é aberto}\}.$$

Proposição 3.4.3. *Seja X um espaço métrico e $x \in X$. Então a família*

$$\mathcal{A}_x = \mathcal{V}(x) \cap \tau_X$$

é uma base de vizinhanças de x.

Demonstração. Basta notar que, chamando de $\mathcal{B}$ a coleção de todas as bolas centradas em x,

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_x \subset \mathcal{V}(x).$$

Como $\mathcal{B}$ é uma base de vizinhanças de x, qualquer família “entre” $\mathcal{B}$ e $\mathcal{V}(x)$ também é uma base de vizinhanças de x. (porquê?) □

Proposição 3.4.4. *Seja X um espaço métrico. Então, τ_X tem as seguintes propriedades:*

1. $\emptyset, X \in \tau_X$.

2. *Se* $A, B \in \tau_X$*, então* $A \cap B \in \tau_X$*.*

3. *Se* $A_\lambda \in \tau_X$ *para uma família qualquer de índices* $\lambda \in \Lambda$*, então* $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \in \tau_X$*.*

Demonstração. Para o item (1), é fácil ver que X é vizinhança de qualquer ponto $x \in X$. Para o conjunto vazio ... note que todos os elementos do conjunto vazio satisfazem a propriedade que você quiser. Neste caso, a propriedade de terem $\emptyset$ como vizinhança. ;-)

O item (2) é consequência do item (2) da proposição 3.1.3. Ou seja, se $x \in A \cap B$, como A e B são vizinhanças de x, então $A \cap B$ também é vizinhança de x. Assim, $A \cap B$ é vizinhança de todos os seus pontos.

Do mesmo modo, o item (3) é consequência do item (1) da proposição 3.1.3. □

Proposição 3.4.5. *Seja* X *um espaço métrico e* $A \subset X$*. Então, são equivalentes:*

1. *O conjunto* A *é aberto.*

2. *O conjunto* A *pode ser escrito como uma união de bolas.*

Demonstração. Se A é aberto, então para cada ponto $x \in A$ existe uma bola B_x centrada em x e contida em A. Desta forma, é evidente que

$$A = \bigcup_{x \in A} B_x.$$

Ou seja, A é uma união de bolas.

Por outro lado, sabemos que as bolas são conjunto abertos. Assim, qualquer conjunto que seja uma união de bolas é, pelo item (3) da proposição 3.4.4, um conjunto aberto. □

Sequências e Convergência com Abertos

Dado um espaço métrico X. Podemos caracterizar o fenômeno de convergência em termos de sua topologia τ_X? De fato, para dizer se $x_n \in X$ converge ou não para um certo $x \in X$, de acordo com a proposição 3.3.2, precisamos apenas conhecer uma base de vizinhanças de x qualquer. Sabemos que os abertos que contém x formam uma base de vizinhanças de x. Sendo assim, colcluímos que x_n converge para x se, e somente se, para todo aberto A que contenha o ponto x existir $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in A.$$

3.5 Continuinuidade em Todo Ponto

Uma aplicação $f : X \to Y$ entre espaços métricos X e Y é contínua quando é contínua em todo ponto do seu domínio. Se considerarmos $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$, a função será contínua em $x \in X$ quando f^{-1} levar vizinhanças de $f(x)$ em vizinhanças de x. Sendo assim, se $A \subset Y$ for um conjunto aberto (vizinhança de todos os seus pontos) e f for contínua, então $f^{-1}(A)$ será também vizinhança de todos os seus pontos. Ou seja, se f é contínua, então $f^{-1}(\tau_Y) \subset \tau_X$. Vamos formalizar isso.

Proposição 3.5.1. *Sejam X e Y espaços métricos, e $f : X \to Y$ uma função qualquer. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *A função f é contínua em todo ponto de X.*

2. *Vale que $f^{-1}(\tau_Y) \subset \tau_X$.*

Demonstração. Seja $A \in \tau_Y$. Então, para todo $x \in f^{-1}(A)$ temos que A é vizinhança de $f(x)$, e pela proposição 3.2.1, $f^{-1}(A)$ é vizinhança de x. Ou seja, $f^{-1}(A)$ é aberto.

Por outro lado, sabemos pela proposição 3.4.3 que para todo $x \in X$,

$$\mathcal{A}_{f(x)} = \mathcal{V}(f(x)) \cap \tau_Y$$

é uma base de vizinhanças de $f(x)$. Pelo item (2), temos que $f^{-1}(\mathcal{A}_{f(x)})$ é aberto e óbviamente contém x. Ou seja, $f^{-1}(\mathcal{A}_{f(x)}) \in \mathcal{V}(x)$. Pela proposição 3.3.3, segue que f é contínua em x. □

E o que significa então dizer que $f : X \to Y$ é bijetiva, contínua e sua inversa é contínua? O fato de ser uma bijeção implica que podemos identificar os pontos de X com os pontos de Y. O fato de ser contínua com inversa contínua significa que com essa identificação as estruturas topológicas τ_X e τ_Y também são identificadas. Esse tipo de função f é chamada de *homomorfismo*.

Definição 3.5.2. *Se X e Y são espaços métricos, então uma função $f : X \to Y$ é chamada de* homomorfismo *quando é bijetiva, contínua com inversa também contínua.*

Parte II

Topologia Geral

Capítulo 4

Motivação e Definições

4.1 Motivação

Esta seção não é formal. Nosso propósito aqui é apenas dar motivação para as definições e propriedades que serão estudadas nas seções seguintes.

Nossa motivação é obviamente o estudo que acabamos de fazer de *espaços métricos*. Devidamente motivados por tudo o que já estudamos na primeira parte do livro, vamos abstrair o que seria a essência dos fenômenos de *convergência* e *continuidade*. Uma alternativa seria associar ao espaço X em questão uma estrutura que identificasse, para cada um dos pontos $x \in X$, quais são e quais não são as sequências que convergem para x. Uma deficiência desta abordagem está na dependência para com o conjunto dos números naturais, que indexam as tais sequências. Futuramente, veremos que uma solução alternativa é o uso de "redes" em substituição ao de sequência. Esta abordagem será feita no capítulo **??**.

Outra maneira seria associar a X uma estrutura que indicasse, quais são os conjuntos que formam as "vizinhanças" de cada ponto de X. As vizinhanças de $x \in X$ indicam o que está "próximo" de x. O ponto x estaria próximo de um conjunto $B \in X$ quando para todo $V \in \mathcal{V}(x)$, tivermos $B \cap V \neq \emptyset$. Diremos que $x_n \in X$ converge para x quando para todo $\Gamma \subset \mathbb{N}$ com $\#\Gamma = \infty$, os conjuntos

$$B_\Gamma = \{x_n \mid n \in \Gamma\}$$

estiverem "próximos" de x. A palavra "próximo" está entre aspas porque esse não é o termo matemático utilizado. O correto seria dizer que x está no *fecho* de B (definição **??**), ou que é um ponto de *aderência* de B. (Porque não utilizamos $n \geq N$ para todo $N \in \mathbb{N}$ ao invés de $n \in \Gamma$?)

As famílias $\mathcal{V}(x)$, das vizinhanças de $x \in X$ deveriam satisfazer as propriedades listadas na proposição 3.1.3. O item (1) não gera grandes polêmicas. Para que um conjunto esteja próximo do ponto, teria que interceptar todas as suas vizinhanças, portanto, acrescentar conjuntos maiores não modificaria a "converência". Talvez o nome "vizinhança" não seja realmente uma boa escolha, já que sugere que sejam conjuntos pequenos. Não faz diferença no entanto, já que nossos argumentos são do tipo

> intercepta todas as vizinhanças, por menores que sejam.

Esse tipo de argumento poderia ser restrito às vizinhanças "pequenas", mas não faria diferença, e seria complicado dizer o que é um conjunto "grande demais". Veja a definição de *base de vizinhanças de um ponto* (3.3.1) e a proposição 3.3.2). Assim, o item (1) se presta mesmo a maximizar a família $\mathcal{V}(x)$ de modo que o fenômeno de convergência não seja alterado.

O item (2) também serve ao mesmo propósito de maximizar a família $\mathcal{V}(x)$. Isso porque, se para $U, V \in \mathcal{V}(x)$, existem $N_U, N_V \in \mathbb{N}$ tais que

$$\begin{gathered} n \geq N_U \Rightarrow x_n \in U \\ n \geq N_V \Rightarrow x_n \in V \end{gathered}$$

então, fazendo $N_{U\cap V} = \max\{N_U, N_V\}$,

$$n \geq N_{U\cap V} \Rightarrow x_n \in U \cap V.$$

Assim, se U e V são vizinhanças de x, considerando ou não o conjunto $U\cap V$ à família do que chamamos de vizinhanças de x, o conceito de converência não mudaria. O que não fosse convergente continuaria não convergente, e o que fosse convergente permaneceria convergente.

O item mais difícil de aceitar da proposição 3.1.3, é o item (3). Como já mencionamos anteriormente, na observação 3.1.4, este item serve para garantir que se $x_m^n \to x_n$, onde $x_m^n \notin V$ para alguma vizinhança de $x \in X$, então não é possível acontecer que $x_n \to x$. É equivalente a dizer que os abertos que contém $x \in X$ formam uma base de vizinhanças de X. É o que garante que se conhecermos os abertos, conheceremos toda a topologia.

A opção que vamos adotar, ao menos por enquanto, é a de definir a topologia definindo o que seriam os conjuntos abertos. Para um conjunto X, escolhemos $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ de modo que τ tenha as propriedades listadas na proposição 3.4.4. Essas propriedades são semelhantes às correspondentes para "vizinhanças". Dizer que $X \in \tau$ é o mesmo que dizer que todo ponto tem ao menos uma vizinhança (aberta).

4.2 Definição

Agora que, na medida do possível, devidamente motivados, vamos definir o que senha a ser uma topologia em um conjunto X qualquer.

Definição 4.2.1 (Espaço Topológico)**.** *Seja X um conjunto qualquer. Dizemos que uma família $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ define uma* topologia *no espaço X, ou que (X, τ) é um* espaço topológico*, quando τ satisfaz:*

1. *$\emptyset, X \in \tau$.*
2. *Se $A, B \in \tau$, então $A \cap B \in \tau$.*
3. *Se $A_\lambda \in \tau$ para uma família qualquer de índices $\lambda \in \Lambda$, então $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \in \tau$.*

Os subconjuntos $A \subset X$ tais que $A \in \tau$ são chamados de abertos do espaço topológico (X, τ). Por um abuso de notação, quando conveniente, dizemos que X é um espaço topológico.

A topologia de um espaço métrico, definida em 3.4.2 é de fato uma topologia no sentido da definição 4.2.1 pela proposição 3.4.4. Vejamos outros exemplos de topologia.

Exemplos

Exemplo 4.2.2 (Topologia Discreta)**.** Dado um conjunto qualquer X, $(X, \mathcal{P}(X))$ é um espaço topológico. Esta topologia é induzida, por exemplo, pela métrica discreta mencionada no exemplo 1.3.2.

Exemplo 4.2.3 (Topologia Trivial (caótica))**.** Dado um conjunto qualquer X, $(X, \{\emptyset, X\})$ é um espaço topológico. Se o conjunto X tiver mais do que um elemento, essa topologia nunca é dada (induzida) por uma métrica, pois não satisfaz a proposição 1.2.4.

Exemplo 4.2.4 (Topologia da Continuidade Inferior)**.** Considere os números reais $\mathbb{R}$ e a seguinte família de subconjuntos de $\mathbb{R}$

$$\tau = \{(\alpha, \infty) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Neste caso, $(\mathbb{R}, \tau)$ é um espaço topológico. Assim como no exemplo 4.2.3, essa topologia também não é induzida por uma métrica.

Do mesmo modo, existe a topologia da *Continuidade Superior*, dada por

$$\tau = \{(-\infty, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Exemplo 4.2.5 (Topologia Inicial)**.** Seja X um conjunto e (Y, τ_Y) um espaço topológico. Considere uma aplicação $f : X \to Y$ qualquer. Então $(X, f^{-1}(\tau_Y))$ é um espaço topológico.

4.3 Vizinhanças e Base de Vizinhanças de um Ponto

Assim como fizemos para espaços métricos, podemos definir para um espaço topológico (X, τ), o que é para cada ponto $x \in X$, a família de todas as suas vizinhanças.

Definição 4.3.1. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Dado $x \in X$, uma* vizinhança aberta *de x é um aberto $A \in \tau$ que contém o ponto x. Uma* vizinhança *de x é qualquer conjunto que contenha uma vizinhança aberta de x. Denotamos por $\mathcal{V}(x)$ a família de todas as vizinhanças de x.*

Em um espaço topológico qualquer, as vizinhanças de um ponto possuem as mesmas propriedades que as descritas na proposição 3.1.3 para o caso de espaços métricos.

Proposição 4.3.2. *Seja X um espaço topológico, e $x \in X$ um ponto de X. Então valem as seguintes afirmações sobre a família $\mathcal{V}(x)$ de todas as vizinhanças de x:*

1. *Se $A \in \mathcal{V}(x)$ e $A \subset B$, então $B \in \mathcal{V}(x)$.*

2. *A interseção de duas vizinhanças de x também é uma vizinhança de x. Ou seja, se $A, B \in \mathcal{V}(x)$, então $A \cap B \in \mathcal{V}(x)$.*

3. *Se $A \in \mathcal{V}(x)$ então existe $B \subset A$ tal que $x \in B$ e B é vizinhança de todos os seus pontos.*

Demonstração. Todos os itens são evidentes da definição de vizinhança. O item (2) é consequência do fato de τ ser fechado por interseção finita. $\square$

Assim como no caso de espaços métricos, podemos caracterizar os conjuntos abertos como sendo aqueles que são vizinhanças de todos os seus pontos.

Proposição 4.3.3. *Dado um espaço topológico X, um conjunto $A \subset X$ é aberto se, e somente se, for vizinhança de todos os seus pontos.*

Demonstração. Pela definição de vizinhança, um conjunto aberto é evidentemente vizinhança de todos os seus pontos. Suponha então que $A \subset X$ é vizinhança de todos os seus pontos. Vamos mostrar que A é aberto.

Por hipótese, para cada $a \in A$ existe um aberto U_a tal que $a \in U_a \subset A$. Neste caso,

$$A = \bigcup_{a \in A} U_a.$$

Como A é uma união de abertos U_a, temos que A também é aberto. $\square$

Definição 4.3.4. *Seja (X, τ) um espaço topológico e $x \in X$ um ponto qualquer de x. Uma família formada por vizinhanças de x, $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}(x)$, é chamada de* base de vizinhanças *de x quando para toda vizinhança $V \in \mathcal{V}(x)$ existir $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset V$. Se todos os conjuntos de $\mathcal{B}$ forem abertos, ou seja, se $\mathcal{B} \subset \tau$, então diremos que $\mathcal{B}$ é uma* base de vizinhanças abertas *de x.*

Agora que definimos o que vêem a ser as vizinhanças de um ponto, mesmo não tendo uma métrica, podemos definir convergência de sequências. As sequências não serão tão importantes para a teoria geral. No entanto, motivarão a definição de *redes* dada no capítulo **??**.

Definição 4.3.5. *Seja (X, τ) um espaço topológico e $x_n \in X$ uma sequência de elementos de X. Dizemos que x_n* converge *para $x \in X$ na topologia τ, quando para toda vizinhança $V \in \mathcal{V}(x)$ existir $N = N(V) \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in V.$$

De maneira semelhante ao caso dos espaços métricos, denotamos tal fato por $x_n \xrightarrow{\tau} x$, ou simplesmente $x_n \to x$.

Novamente, como no caso métrico, para saber se uma sequência $x_n \in x$ converge para $x \in X$, basta verificar a condição da definição 4.3.5 para uma base de vizinhanças de x. Também, como no caso dos espaços métricos, dado $x \in X$, a família das vizinhanças abertas de x formam uma base para $\mathcal{V}(x)$.

4.4 Continuidade em um Ponto

A essas alturas, o leitor já sabe o que será tratado neste capítulo. Assim como fizemos para os espaços métricos no capítulo 3.2, vamos falar sobre a continuidade de aplicações entre espaços topológicos. O leitor deve comparar a definição 4.4.1 e a proposição 3.2.1, que caracteriza continuidade em um ponto em espaços métricos.

Definição 4.4.1. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma aplicação qualquer entre X e Y. Para $x \in X$, dizemos que f é contínua em x quando*

$$f^{-1}\left(\mathcal{V}\left(f(x)\right)\right) \subset \mathcal{V}\left(x\right).$$

Ou seja, quando a imagem inversa de toda vizinhança de $f(x)$ for uma vizinhança de x.

Em uma formulação mais semelhante aos argumentos do estilo $\varepsilon - \delta$, a definição de continuidade fica assim

Para todo $V \in \mathcal{V}\left(f(x)\right)$ existe $U \in \mathcal{V}\left(x\right)$ tal que

$$y \in U \Rightarrow f(y) \in V.$$

Como no caso de espaços métricos, basta verificar a condição da definição para uma base de vizinhanças de x.

Proposição 4.4.2. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$. Sejam $x \in X$ e $\mathcal{B}$ uma base de vizinhanças de $f(x)$. Então, f é contínua em x se, e somente se,*

$$f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{V}\left(x\right).$$

Demonstração. Se $V \in \mathcal{V}\left(f(x)\right)$, então existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset V$. Portanto, $f^{-1}(V) \supset f^{-1}(B) \in \mathcal{V}\left(x\right)$. Portanto, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}\left(x\right)$. Como V é um elemento arbitrário de $\mathcal{V}\left(f(x)\right)$, temos que

$$f^{-1}\left(\mathcal{V}\left(f(x)\right)\right) \subset \mathcal{V}\left(x\right).$$

□

4.5 Continuidade

Continuidade é um conceito central em topologia. Uma aplicação contínua transporta aspectos topológicos entre os espaços em questão. Dada uma aplicação $f : X \to Y$ entre os conjuntos X e Y, podemos ver f^{-1} como uma aplicação

$$f^{-1} : \mathcal{P}\left(Y\right) \to \mathcal{P}\left(X\right).$$

Se (X, τ_X) e (Y, τ_Y) são espaços topológicos e f é contínua em $x \in X$, podemos olhar para f^{-1} restrita a $\mathcal{V}(f(x))$ como sendo uma aplicação

$$f^{-1} : \mathcal{V}(f(x)) \to \mathcal{V}(x).$$

A proposição a seguir demonstra que quando f é contínua em todo ponto de X, então a restrição de f^{-1} a τ_Y pode ser vista como uma aplicação

$$f^{-1} : \tau_Y \to \tau_X.$$

Proposição 4.5.1. *Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma aplicação de X em Y. Neste caso, são equivalentes:*

1. *A função f é contínua em todo ponto $x \in X$.*

2. *Para todo aberto $A \in \tau_Y$, $f^{-1}(A) \in \tau_X$.*

Demonstração. Se f é contínua em todo ponto, então, dado $A \in \tau_Y$, temos que para todo ponto $x \in f^{-1}(A)$, $f(x) \in A$. Ou seja, $A \in \mathcal{V}(f(x))$. Pela continuidade de f no ponto x, temos que $f^{-1}(A) \in \mathcal{V}(x)$. Acabamos de mostrar que $f^{-1}(A)$ é vizinhança de todos os seus pontos. Pela proposição 4.3.3, $f^{-1}(A)$ é um aberto de X. $\square$

Definição 4.5.2 (Função Contínua)**.** *Dizemos que uma função $f : X \to Y$ entre os espaços topológicos (X, τ_X) e (Y, τ_Y) é contínua quando é contínua em todo ponto $x \in X$. Ou, equivalentemente, quando $f^{-1}(\tau_Y) \subset \tau_X$.*

Homeomorfismos

Para dois conjuntos X e Y, uma bijeção $f : X \to Y$ identifica cada ponto de X a um único ponto de Y e vice-versa. Se X e Y forem espaços topológicos, f for contínua e sua inversa $f^{-1} : Y \to X$ também for contínua, então também serão identificados cada aberto de X com um único aberto de Y e vice-versa. Tudo o que puder ser dito sobre a topologia de X poderá ser afirmado sobre a topologia de Y através da identificação dada por f.

Definição 4.5.3 (Homeomorfismo)**.** *Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que uma aplicação*

$$f : X \to Y$$

é um homeomorfismo de X em Y quando f for bijetiva, contínua e sua inversa f^{-1} também for contínua.

Quando existe um homeomorfismo entre dois espaços topológicos, dizemos que estes espaços são homeomorfos.

Aplicação Aberta

Com uma aplicação $f : X \to Y$ entre espaços topológicos, podemos tentar relacionar as topologias de (X, τ_X) e (Y, τ_Y). Se f for um homeomorfismo, sabemos que X e Y possuem exatamente a mesma topologia quando os pontos de X são identificados com os de Y através de f. Se f for uma bijeção contínua, podemos identificar X com o subconjunto Y, como conjuntos. Com esta identificação, teremos que $\tau_Y \subset \tau_X$. Uma outra propriedade que f pode ter, que ajudaria a relacionar os espaços X e Y é a de levar abertos de X em abertos de Y. Neste caso, dizemos que f é uma *aplicação aberta*.

Definição 4.5.4. *Seja $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ uma aplicação entre os espaços topológicos X e Y. Dizemos que f é uma* aplicação aberta *quando $f(\tau_X) \subset \tau_Y$.*

Um homeomorfismo é uma bijeção contínua e aberta. Nossa motivação para a definição de *aplicação aberta* é simplesmente imaginar, ignorando o fato de que f pode nem mesmo ser bijetiva, o que seria necessário para que f^{-1} seja contínua. Mais adiante, veremos maneiras de se transportar topologias de um espaço topológico a um conjunto qualquer através de aplicações entre eles. Quando temos uma bijeção entre um espaço topológico e um conjunto qualquer, fica fácil transportar a topologia de um para o outro. Adiantando um pouco as coisas, imagine que $f : X \to Y$ é uma sobrejeção aberta e contínua do espaço topológico X no espaço topológico Y. Podemos definir o conjunto

$$\tilde{X} = \left\{ f^{-1}(y) \mid y \in Y \right\},$$

que nada mais é do que "agrupar" todos os elementos de X que têm a mesma imagem. A projeção natural de X em $\tilde{X}$ é dada por

$$\begin{array}{rccl} \pi : & X & \to & \tilde{X} \\ & x & \mapsto & f^{-1}(f(x)) \end{array}.$$

A projeção leva um elemento $x \in X$ na "classe" formada por todos os elementos de X que tem, por f, a mesma imagem que x. A aplicação f pode ser fatorada, de modo que o seguinte diagrama é comutativo (ou seja, $f = \tilde{f} \circ \pi$):

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ \tilde{X} \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}.$$

Basta definir $\tilde{f}(f^{-1}(y)) = y$. Agora, $\tilde{f}$ é uma bijeção. Faria sentido esperar que a topologia de X pudesse ser transportada para $\tilde{X}$, de modo que $\tilde{f}$ se tornasse um homeomorfismo entre Y e $\tilde{X}$. Trataremos desse tipo de topologia no capítulo 6.

Assim como podemos falar em *continuidade em um ponto*, podemos também definir o que seria dizer que $f : X \to Y$ é aberta em $x \in X$. Assim como no caso de continuidade, a definição fica melhor se usarmos *vizinhanças de x* ao invés de abertos.

Definição 4.5.5. *Seja $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ uma aplicação entre os espaços topológicos X e Y. Dizemos que f é uma* aplicação aberta em *$x \in X$ quando $f(\mathcal{V}(x)) \subset \mathcal{V}(f(x))$.*

Capítulo 5

Construindo Topologias

5.1 Comparando Topologias

Em um mesmo conjunto X, podemos ter definidas duas topologias τ_1 e τ_2. Pode acontecer que $\tau_1 \subset \tau_2$, por exemplo. Neste caso, sempre que $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_Y)$ fosse contínua, teríamos que $f : (X, \tau_2) \to (Y, \tau_Y)$ também será contínua. Também podemos concluir que

$$x_n \xrightarrow{\tau_2} x \Rightarrow x_n \xrightarrow{\tau_1} x.$$

Pode ser que não tenhamos nem $\tau_1 \subset \tau_2$, nem $\tau_2 \subset \tau_1$. Duas topologias nem sempre são comparáveis.

Definição 5.1.1. *Se (X, τ_1) e (X, τ_2) são duas topologias em um mesmo conjunto X e $\tau_1 \subset \tau_2$, então dizemos que τ_2 é* mais forte *ou* mais fina *que τ_1. Também dizemos que τ_1 é* mais fraca *que τ_2.*

Podemos também dizer que τ_1 é menor *que τ_2, ou que τ_2 é* maior *que τ_1. Veja a observação 5.1.3.*

Proposição 5.1.2. *Seja X um conjunto qualquer, e τ_λ $(\lambda \in \Lambda)$ uma família de topologias em X. Então $\tau = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda$ é uma topologia em X.*

Demonstração. Basta verificar que τ satisfaz os axiomas listados na definição 4.2.1. Por exemplo,

$$A, B \in \tau \Rightarrow \forall \lambda \in \Lambda,\ A \cap B \in \tau_\lambda \Rightarrow A \cap B \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda = \tau.$$

$\square$

Observação 5.1.3. A relação *mais forte que* define uma *ordem parcial* na família de todas as topologias de um conjunto X. Na verdade, esta ordem é simplesmente a restrição da relação de inclusão definida em $\mathcal{P}(X)$ à família de todas as topologias de X.

Existe um elemento *máximo* dentre todas as topologias de X. É o conjunto das partes de X, $\mathcal{P}(X)$, que é a mais forte das topologias que podem ser definidas em X. Por outro lado, $\{\emptyset, X\}$ é a topologia mais fraca possível de ser definida em X.

A proposição 5.1.2 mostra que dada uma família de topolgias τ_λ, existe a *maior topologia que é menor que todas as* τ_λ. Essa topologia τ é o *ínfimo* das τ_λ. Escrevemos

$$\tau = \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda.$$

Por outro lado, a união de topologias não é necessariamente uma topologia. No entanto, se considerarmos a família $\mathcal{F}$ de todas as topologias que são maiores que todas as τ_λ, sabemos que a família $\mathcal{F}$ não é vazia, pois $\mathcal{P}(X) \in \mathcal{F}$. Seja então σ o ínfimo de $\mathcal{F}$. Ou seja,

$$\sigma = \bigwedge_{\rho \in \mathcal{F}} \rho.$$

A topologia σ é a menor topologia que é maior que todas as τ_λ. Essa topologia é o supremo de τ_λ e é denotada por

$$\sigma = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda.$$

Comparação de Topologias e Continuidade

Quando X é um espaço topológico dotado de duas topologias τ_1 e τ_2, o que podemos dizer da relação entre essas topologias se soubermos que a aplicação identidade

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id}: & (X, \tau_1) & \to & (X, \tau_2) \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

é contínua?

Proposição 5.1.4. *Seja X um conjunto qualquer e (Y, τ_Y) um espaço topológico. Dada uma aplicação qualquer $f : X \to Y$, $\tau_f = f^{-1}(\tau_Y)$ define uma topologia em X.*

Demonstração. Basta notar que $\emptyset, X \in \tau_f$, se $A, B \in \tau_f$, então $A = f^{-1}(A')$ e $B = f^{-1}(B')$ com $A', B' \in \tau_Y$. Como τ_Y é uma topologia, $A' \cap B' \in \tau_Y$. Assim, $A \cap B = f^{-1}(A' \cap B') \in f^{-1}(\tau_Y) = \tau_f$. Podemos fazer analogamente para a união arbitrária de elementos de τ_f. Basta observar que $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ *comuta com* as operações de união e interseção. $\square$

Pela proposição 5.1.4, dizer que $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ é contínua é o mesmo que dizer que a topologia τ_f é mais fraca que τ_X. De fato, é fácil verificar que τ_f é a menor topologia que faz com que $f : X \to (Y, \tau_Y)$ seja contínua.

5.2 Sub-Base

A construção feita na observação 5.1.3 é muito comum. É essa construção que em álgebra, por exemplo, nos permite definir para um grupo G e um subconjunto qualquer $S \subset G$, o que seria o *grupo gerado por* S. Esse seria o menor subgrupo de G que contém S. Do mesmo modo, para um espaço vetorial V e um subconjunto qualquer $S \subset V$, podemos definir o menor subespaço de V que contenha S. Este é o *sub-espaço vetorial gerado por* S. Existem exemplos também em teoria da medida. Assim, como na proposição 5.1.2, a interseção de uma família de sub-grupos é um sub-grupo, a interseção de uma família de sub-espaços vetoriais é um sub-espaço vetorial.

Definição 5.2.1. *Seja X um conjunto qualquer, e $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ uma família qualquer de subconjuntos de X. Então a topologia*

$$\tau(\mathcal{C}) = \bigvee_{\mathcal{C} \subset \tau} \tau$$

é a topologia gerada por $\mathcal{C}$. Essa é a menor topologia de X que contém a família $\mathcal{C}$.

Definição 5.2.2. *Seja X um conjunto qualquer, e $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ uma família qualquer de subconjuntos de X. Mesmo sem definir o que venha a ser uma base para a topologia (definição 5.3.1), vamos definir o conjunto*

$$\mathcal{B}(\mathcal{C}) = \left\{ \bigcap_{j=1}^{n} A_j \mid n \in \mathbb{N},\ A_j \in \mathcal{C} \right\},$$

e chamá-lo de base induzida pela família $\mathcal{C}$.

Por um abuso de notação, quando $\mathcal{C} = \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, por vezes escrevemos $\tau(A_\lambda, \lambda \in \Lambda)$. E quando $\mathcal{C}_\lambda$, $(\lambda \in \Lambda)$ é uma coleção de famílias de subconjuntos de X, escrevemos $\tau(\mathcal{C}_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ ao invés de $\tau\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{C}_\lambda\right)$. As seguintes propriedades da topologia gerada por uma família são consequências diretas da definição.

Proposição 5.2.3. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ famílias de subconjuntos de um conjunto X, e τ uma topologia em X. Então, valem as seguintes propriedades:*

1. *Se $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$, então $\tau(\mathcal{C}) \subset \tau(\mathcal{D})$.*
2. *Temos que $\mathcal{C} \subset \tau$ se, e somente se, $\tau(\mathcal{C}) \subset \tau$.*
3. *Se τ é uma topologia, então $\tau = \tau(\tau)$. Em particular, vale que $\tau(\tau(\mathcal{C})) = \tau(\mathcal{C})$.*
4. *Se $\mathcal{C} \subset \tau \subset \tau(\mathcal{C})$, então $\tau = \tau(\mathcal{C})$.*
5. *Se $\mathcal{C} \subset \mathcal{D} \subset \tau(\mathcal{C})$, então $\tau(\mathcal{C}) = \tau(\mathcal{D})$.*
6. *Se $\mathcal{E} = \tau(\mathcal{C}) \cup \tau(\mathcal{D})$, então $\tau(\mathcal{E}) = \tau(\mathcal{C} \cup \mathcal{D})$.*
7. *Seja $\mathcal{C}_\lambda$, $(\lambda \in \Lambda)$ uma coleção de famílias de subconjuntos de X, então, $\tau(\tau(\mathcal{C}_\lambda), \lambda \in \Lambda) = \tau(\mathcal{C}_\lambda, \lambda \in \Lambda)$.*

Demonstração. Vamos mostrar apenas o item (7), que é mais difícil. O resto fica como exercício. :-)

É evidente, pelo item (1), que

$$\tau(\mathcal{C}_\lambda, \lambda \in \Lambda) \subset \tau(\tau(\mathcal{C}_\lambda), \lambda \in \Lambda).$$

No entanto, novamente pelo item (1), sabemos que

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \tau(\mathcal{C}_\lambda) \subset \tau(\mathcal{C}_\lambda, \lambda \in \Lambda).$$

Agora, pelo item (2),

$$\tau\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \tau_\lambda\right) \subset \tau(\mathcal{C}_\lambda, \lambda \in \Lambda).$$

$\square$

Forma da Topologia Gerada

Qual é a forma de um aberto de $\tau(\mathcal{C})$ quando expresso em termos de $\mathcal{C}$? Obviamente que a topologia gerada por $\mathcal{C}$ deve conter todas as interseções finitas e todas as uniões de elementos de $\mathcal{C}$. Mas isso nem sempre é suficiente. A proposição 5.2.4 nos diz como podemos escrever os abertos da topologia gerada em termos dos conjuntos na sub-base.

Proposição 5.2.4. *Seja $\mathcal{C}$ uma sub-base para um espaço topológico (X, τ). Ou seja, $\tau = \tau(\mathcal{C})$. Vamos assumir que $\emptyset, X \in \mathcal{C}$. Considere a base induzida $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{C})$ de todas as interseções finitas de conjuntos de $\mathcal{C}$. Então, todos os conjuntos da topologia são uniões de conjuntos de $\mathcal{B}$:*

$$\tau = \left\{ \bigcup_{A \in \mathcal{B}'} A \mid \mathcal{B}' \subset \mathcal{B} \right\}.$$

Demonstração. A topologia τ necessariamente contém $\mathcal{B}$. Assim,

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \subset \tau.$$

Considere então, a família τ' dada pelas uniões de elementos de $\mathcal{B}$:

$$\tau' = \left\{ \bigcup_{A \in \mathcal{B}'} A \mid \mathcal{B}' \subset \mathcal{B} \right\}.$$

Novamente,

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \subset \tau' \subset \tau.$$

Para concluir que $\tau = \tau'$, basta mostrar que τ' é uma topologia. Como τ é a menor que contém $\mathcal{C}$, poderemos concluir que $\tau = \tau'$. É imediato que

$$\emptyset, X \in \tau'.$$

Também é evidente pela própria definição de τ', que τ' é fechado por uniões arbitrárias. Basta então verificar que se $A, B \in \tau'$, então $A \cap B \in \tau'$. Onde,

$$A = \bigcup_{U \in \mathcal{B}_A} U \quad (\mathcal{B}_A \subset \mathcal{B})$$

$$B = \bigcup_{V \in \mathcal{B}_B} V \quad (\mathcal{B}_B \subset \mathcal{B}).$$

Mas, neste caso,

$$A \cap B = \bigcup_{W \in \mathcal{B}_C} W,$$

onde $\mathcal{B}_C = \{U \cap V \mid U \in \mathcal{B}_A, V \in \mathcal{B}_B\}$. Agora, basta notar que $\mathcal{B}_C \subset \mathcal{B}$, pois $\mathcal{B}$ é fechada por interseção finita. $\square$

Sub-Base e Continuidade

Se temos uma aplicação $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$, e uma sub-base $\mathcal{C}$ de τ_Y. Como podemos dizer, olhando para $f^{-1}(\mathcal{C})$ se f é ou não contínua. Um primeiro "chute" seria talvez dizer que basta que $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \tau_X$. Obviamente que esta é uma condição necessária. A proposição seguinte é o elo que falta para mostrar que a condição $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \tau_X$ é equivalente à continuidade de f.

Proposição 5.2.5. *Sejam X e Y dois conjuntos e $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(Y)$ uma família de subconjuntos de Y. Então,*

$$\tau\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right) = f^{-1}\left(\tau\left(\mathcal{C}\right)\right).$$

Demonstração. Vamos utilizar a seguinte notação:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \tau\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right)\\ \tau_2 &= f^{-1}\left(\tau\left(\mathcal{C}\right)\right).\end{aligned}$$

Por definição, τ_1 é uma topologia. É fácil ver (exemplo 4.2.5) que τ_2 também é uma topologia. Como $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \tau_2$, segue que

$$\tau_1 \subset \tau_2,$$

já que τ_1 é a menor topologia com tal propriedade. Resta então mostrar que dado $A \in \tau_2$, teremos que $A \in \tau_1$.

Pela proposição 5.2.4, dado $A \in \tau_2$, podemos simplesmente mostrar que A pode ser escrito como uma união arbitrária de interseções finitas de elementos de $f^{-1}(\mathcal{C})$. De fato, $A = f^{-1}(A')$, onde $A' \in \tau(\mathcal{C})$ é uma união arbitrária de interseções finitas de elementos de $\mathcal{C}$. Como f^{-1} comuta com as operações de união e interseção, temos a expressão desejada para A, concluindo a demonstração. □

Observação 5.2.6. A demonstração da proposição anterior (5.2.5), utiliza apenas a expressão conhecida de elementos da topologia em função de uma sub-base qualquer (proposição 5.2.5) e o fato de f^{-1} comutar com as operações de união e interseção de conjuntos. Poderíamos também ter feito da seguinte forma, que apesar de longa, faz observações interessantes sobre os operadores $\tau(\cdot)$ e $\mathcal{B}(\cdot)$:

1. Notado que a proposição vale para o caso $\mathcal{C} = \mathcal{B}(\mathcal{C})$, ou seja, para o caso em que qualquer aberto $A \in \tau(\mathcal{C})$ é da forma

$$A = \bigcup_{A' \in \mathcal{C}'} A',$$

para alguma família $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$. Neste caso,

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{A' \in \mathcal{C}'} f^{-1}(A').$$

Ou seja, $\tau_2 \subset \tau_1$. Já sabemos que $\tau_1 \subset \tau_2$ pois τ_1 é a topologia gerada por $f^{-1}(\mathcal{C})$.

2. Observado que, pelo item (5) da proposição 5.2.3,

$$\tau(\mathcal{C}) = \tau(\mathcal{B}(\mathcal{C})).$$

3. Demonstrado que $\mathcal{B}(\cdot)$ comuta com f^{-1}. Ou seja,

$$f^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{C})) = \mathcal{B}\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right).$$

De fato, $B \in f^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{C}))$ se, e somente se, para alguma coleção finita $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{C}$,

$$B = f^{-1}(B_1 \cap \cdots \cap B_n) = f^{-1}(B_1) \cap \cdots \cap f^{-1}(B_n).$$

Sendo que os conjuntos da forma $f^{-1}(B_1) \cap \cdots \cap f^{-1}(B_n)$, são exatamente os elementos de $\mathcal{B}(f^{-1}(\mathcal{C}))$.

4. Observado que, pelo item (1),

$$\tau\left(f^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{C}))\right) = f^{-1}(\tau(\mathcal{B}(\mathcal{C}))).$$

Assim, juntando com os itens (2) e (3),

$$\begin{aligned}\tau_2 = f^{-1}(\tau(\mathcal{C})) = f^{-1}(\tau(\mathcal{B}(\mathcal{C}))) = \\ = \tau\left(f^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{C}))\right) = \tau\left(\mathcal{B}\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right)\right) = \tau\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right) = \tau_1.\end{aligned}$$

Conforme prometido, vamos utilizar a proposição 5.2.5 para mostrar que para uma aplicação $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau(\mathcal{C}))$ ser contínua, basta que $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \tau_X$.

Proposição 5.2.7. *Seja $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$, onde $\tau_Y = \tau(\mathcal{C})$, uma aplicação entre espaços topológicos. Então, f é contínua se, e somente se, $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \tau_X$.*

Demonstração. É evidente que a condição é necessária. Vamos mostrar que é suficiente. Pela proposição 5.2.5, temos que

$$f^{-1}(\tau_Y) = \tau\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right).$$

Mas a hipótese $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \tau_X$ implica que $\tau(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset \tau_X$. Ou seja,

$$f^{-1}(\tau_Y) = \tau\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right) \subset \tau_X.$$

□

5.3 Bases

Dada uma família $\mathcal{C}$ de subconjuntos de um conjunto X, a base induzida $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{C})$ tinha uma propriedade interessante:

> Todo aberto de $\tau(\mathcal{B})$ é uma união de elementos de $\mathcal{B}$.

As famílias com essa propriedade são chamadas de *base da topologia*. Quando construímos a topologia dos espaços métricos, as *bolas* formavam uma base para a topologia. (proposição 3.4.5)

Definição 5.3.1. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Uma família $\mathcal{B} \subset \tau$ é uma* base para a topologia τ *quando todo conjunto $A \in \tau$ puder ser escrito como uma união de elementos de $\mathcal{B}$.*

Como de costume, vamos ver outras maneiras de caracterizar o que vem a ser uma base para uma topologia τ. Note que uma das condições da definição 5.3.1 é que $\mathcal{B} \subset \tau$.

Proposição 5.3.2. *Seja (X, τ) um espaço topológico e $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ uma família de subconjuntos de X. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *A família $\mathcal{B}$ é uma base para τ.*
2. *Além de $\mathcal{B} \subset \tau$; para todo $x \in X$ e todo $A \in \tau$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset A$.*
3. *Para todo $x \in X$, o conjunto*
$$\mathcal{B}_x = \{A \in \mathcal{B} \mid x \in A\}$$
é uma base de vizinhanças de x. (veja a definição 4.3.4)
4. *A família $\mathcal{B}$ gera τ; e para todo $A, B \in \mathcal{B}$ e $x \in A \cap B$ existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $x \in C \subset A \cap B$.*

Demonstração. ■ (1) $\Rightarrow$ (2)

Se $\mathcal{B}$ é uma base, então $\mathcal{B} \subset \tau$. Sejam então $A \in \tau$ e $x \in A$. Como o conjunto A é da forma
$$A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$$
para alguma sub-família $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, basta escolher $B \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B$.

■ (2) $\Rightarrow$ (3)

Evidentemente que $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{V}(x)$, já que a família é formada por conjuntos abertos que contém x. Basta então mostrar que toda vizinhança de x contém algum conjunto de $\mathcal{B}_x$. Para tanto, é suficiente mostrar que toda vizinhança *aberta* A de x contém algum conjunto de $\mathcal{B}_x$. Mas isso é evidente já que A é uma união de conjuntos em $\mathcal{B}$ e portanto, algum deles contém x.

■ (3) $\Rightarrow$ (4)

Se $A, B \in \mathcal{B}$ e $x \in A \cap B$, então, por hipótese, A e B são vizinhanças de x. Portanto, $A \cap B$ também é vizinhança de x. Como $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças de x, então existe $C \in \mathcal{B}_x$ tal que

$$x \in C \subset A \cap B.$$

Precisamos então verificar que $\mathcal{B}$ gera τ. Primeiramente, note que todo conjunto $U \in \mathcal{B}$ é aberto, pois se $x \in U$, então $U \in \mathcal{B} \subset \mathcal{V}(x)$. Ou seja, U é vizinhança de todos os seus pontos. Assim,

$$\tau(\mathcal{B}) \subset \tau.$$

Por outro lado, todo aberto de τ pode ser escrito como uma união de elementos de $\mathcal{B}$, pois dado $V \in \tau$, para cada $x \in V$ existe $V_x \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in V_x \subset V$. Portanto,

$$\tau \subset \tau(\mathcal{B}).$$

(Note que de fato provamos que (3) $\Rightarrow$ (1))

■ (4) $\Rightarrow$ (1)

Seja $U \in \tau = \tau(\mathcal{B})$ um aberto. Então, por 5.2.4, U é uma união de interseções finitas de elementos de $\mathcal{B}$. Portanto, basta mostrarmos que toda interseção finita de elementos de $\mathcal{B}$ pode ser escrita como união de elementos de $\mathcal{B}$. Por hipótese, a afirmação vale para a interseção de dois elementos de $\mathcal{B}$. Suponha que valha para a interseção de n elementos quaisquer de $\mathcal{B}$. Vamos mostrar que vale para a interseção de $n+1$ elementos de $\mathcal{B}$. Seja então

$$A = A_1 \cap \cdots \cap A_n,$$

onde $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}$. Então,

$$A_1 \cap A_2 = \bigcup_{A' \in \mathcal{B}'} A',$$

para algum $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$. Assim,

$$A = \bigcup_{A' \in \mathcal{B}'} (A' \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n).$$

Pela hipótese de indução, cada $A' \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ pode ser escrito como a união de elementos de $\mathcal{B}$. Portanto, A também pode ser escrito como união de elementos de $\mathcal{B}$. □

Dada uma família qualquer $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$, a proposição 5.2.4 mostra que $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ é uma base para $\tau(\mathcal{C})$. Em particular, toda família $\mathcal{B}$ fechada por interseção finita é uma base para $\tau(\mathcal{B})$. Esse fato pode ser verificado também pelo item (4) da proposição 5.3.2. Esta condição não é, no entanto, necessária para que $\mathcal{B}$ seja uma base para $\tau(\mathcal{B})$. As bolas, por exemplo, formam uma base para a topologia de um espaço métrico, mas não é necessariamente verdade que a interseção de duas bolas será uma bola.

Proposição 5.3.3. *Seja $\mathcal{B}$ uma família de subconjuntos de X. Para que $\mathcal{B}$ seja uma base de $\tau(\mathcal{B})$ é necessário e suficiente que para todo $A, B \in \mathcal{B}$, $A \cap B$ possa ser escrito como união de elementos de $\mathcal{B}$.*

Demonstração. Basta verificar as condições do item (4) da proposição 5.3.2. Evidentemente que $\mathcal{B}$ gera $\tau(\mathcal{B})$. O restante da demonstração fica como exercício. □

Capítulo 6

Topologias Derivadas de Outras Topologias

6.1 Topologia de um Sub-Espaço

xxx

6.2 Topologia Produto

xxx

6.3 Topologia Inicial

xxx

6.4 Topologia Final

xxx

6.5 Topologia Quociente

xxx