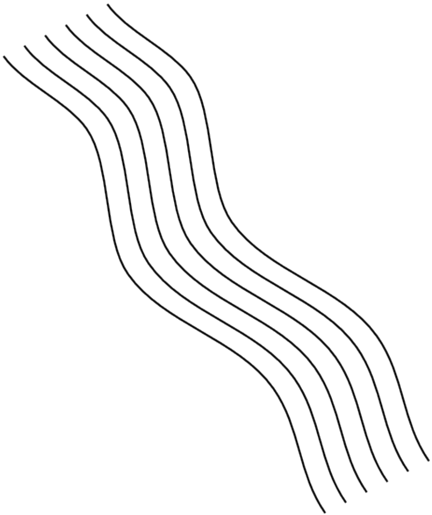
Dinâmica Topológica em Variedades Flag e a Decomposição de Jordan

André Caldas de Souza
Orientador: Mauro Patrão

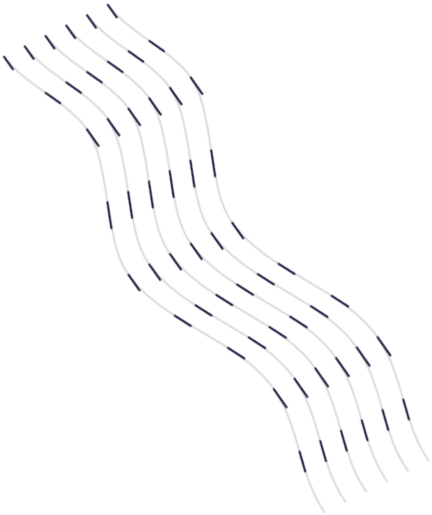
Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

17 de abril de 2009

Motivação e Definição

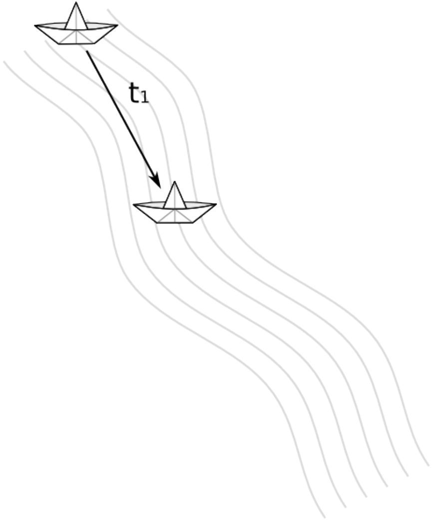


Motivação e Definição

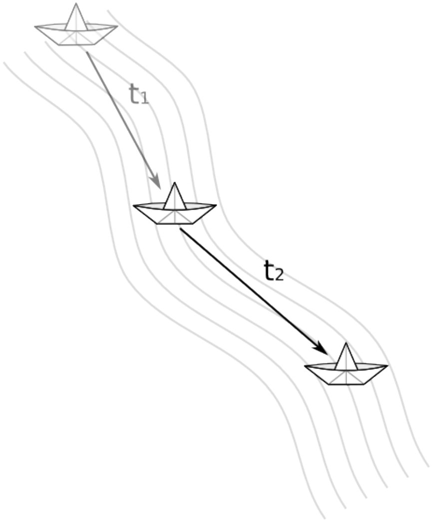


Motivação e Definição

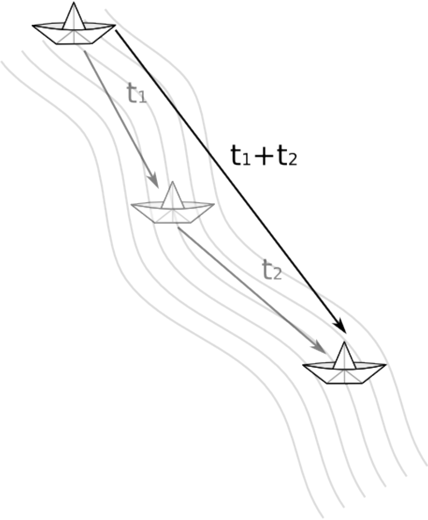
Motivação e Definição



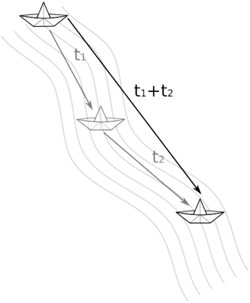
Motivação e Definição



Motivação e Definição



Motivação e Definição



Definição (Fluxo)

$$\phi : \mathbb{T} \times X \to X$$

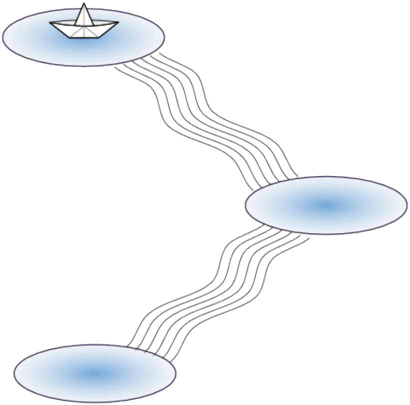
$$\mathbb{T} = \mathbb{R} \quad ou \quad \mathbb{T} = \mathbb{Z}$$

$$\phi^{t_2} \circ \phi^{t_1} = \phi^{t_1+t_2}$$

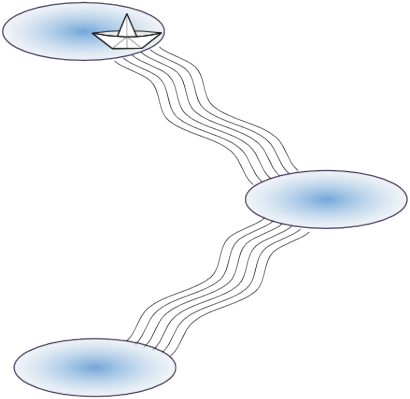
Notação

$$\phi^t = \phi(t, \cdot)$$

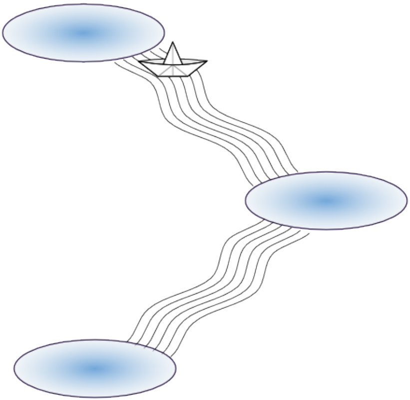
Decomposição de Morse



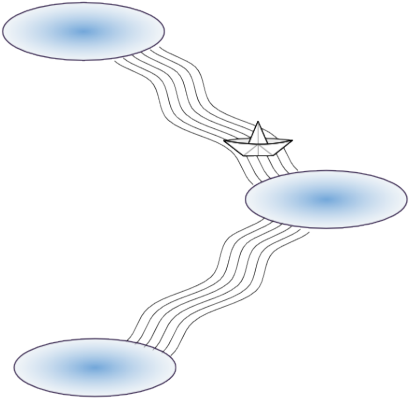
Decomposição de Morse



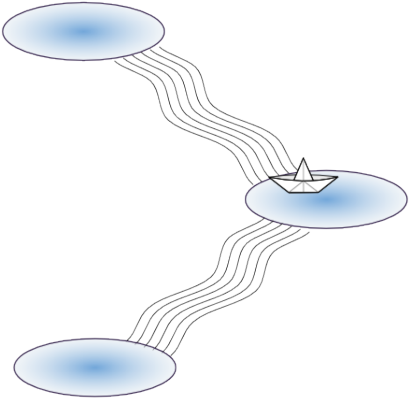
Decomposição de Morse



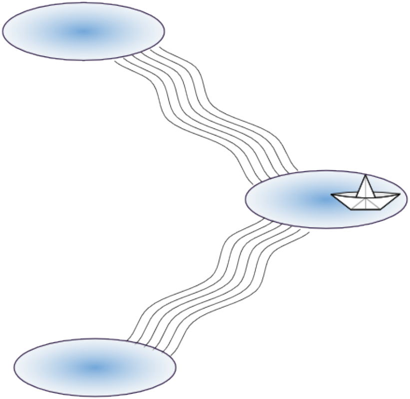
Decomposição de Morse



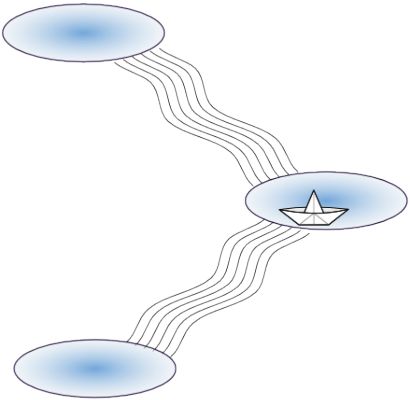
Decomposição de Morse



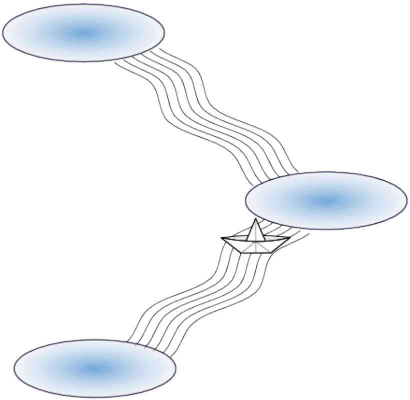
Decomposição de Morse



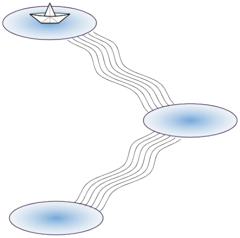
Decomposição de Morse



Decomposição de Morse



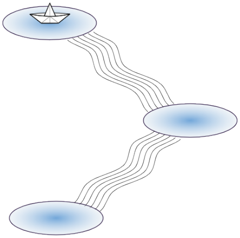
Decomposição de Morse



Decomposição de Morse

- Cada "platô" é invariante.
- Todo ponto "vem" de algum platô, e "vai" para algum platô.
- Pontos que "saem" de um platô vão a um platô distinto.
- Os platôs nunca formam um "ciclo".
- Nenhum platô pode ser "refinado".

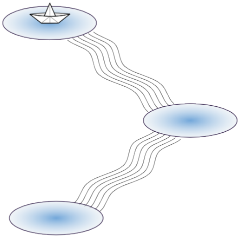
Decomposição de Morse



Decomposição de Morse

- Cada “platô” é invariante.
- Todo ponto “vem” de algum platô, e “vai” para algum platô.
- Pontos que “saem” de um platô vão a um platô distinto.
- Os platôs nunca formam um “ciclo”.
- Nenhum platô pode ser “refinado”.

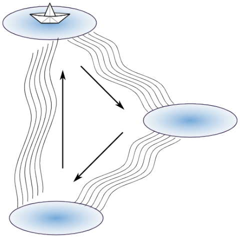
Decomposição de Morse



Decomposição de Morse

- Cada “platô” é invariante.
- Todo ponto “vem” de algum platô, e “vai” para algum platô.
- Pontos que “saem” de um platô vão a um platô distinto.
- Os platôs nunca formam um “ciclo”.
- Nenhum platô pode ser “refinado”.

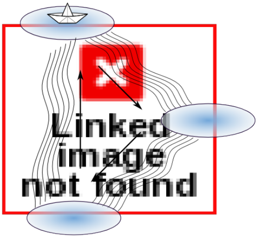
Decomposição de Morse



Decomposição de Morse

- Cada "platô" é invariante.
- Todo ponto "vem" de algum platô, e "vai" para algum platô.
- Pontos que "saem" de um platô vão a um platô distinto.
- Os platôs nunca formam um "ciclo".
- Nenhum platô pode ser "refinado".

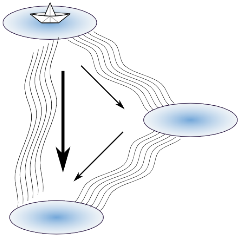
Decomposição de Morse



Decomposição de Morse

- Cada “platô” é invariante.
- Todo ponto “vem” de algum platô, e “vai” para algum platô.
- Pontos que “saem” de um platô vão a um platô distinto.
- Os platôs nunca formam um “ciclo”.
- Nenhum platô pode ser “refinado”.

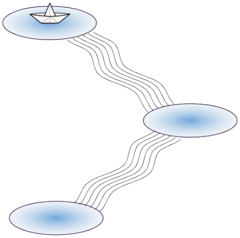
Decomposição de Morse



Decomposição de Morse

- Cada "platô" é invariante.
- Todo ponto "vem" de algum platô, e "vai" para algum platô.
- Pontos que "saem" de um platô vão a um platô distinto.
- Os platôs nunca formam um "ciclo".
- Nenhum platô pode ser "refinado".

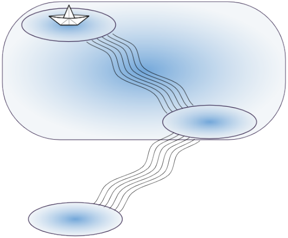
Decomposição de Morse



Decomposição de Morse (mais fina)

- Cada “platô” é invariante.
- Todo ponto “vem” de algum platô, e “vai” para algum platô.
- Pontos que “saem” de um platô vão a um platô distinto.
- Os platôs nunca formam um “ciclo”.
- Nenhum platô pode ser “refinado”.

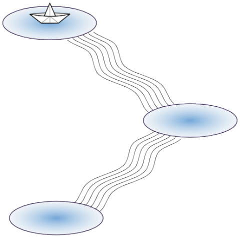
Decomposição de Morse



Decomposição de Morse (mais fina)

- Cada "platô" é invariante.
- Todo ponto "vem" de algum platô, e "vai" para algum platô.
- Pontos que "saem" de um platô vão a um platô distinto.
- Os platôs nunca formam um "ciclo".
- Nenhum platô pode ser "refinado".

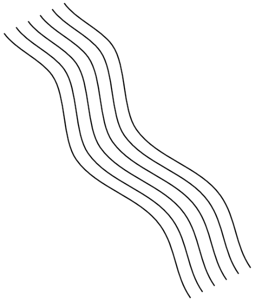
Decomposição de Morse



Decomposição de Morse (mais fina)

- Cada "platô" é invariante.
- Todo ponto "vem" de algum platô, e "vai" para algum platô.
- Pontos que "saem" de um platô vão a um platô distinto.
- Os platôs nunca formam um "ciclo".
- Nenhum platô pode ser "refinado".

Transiência



Pontos transientes

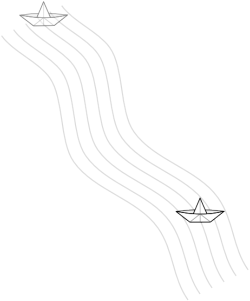
Pontos que não pertencem aos platôs de alguma decomposição de Morse, são chamados de transientes.

Transiência

Pontos transientes

Pontos que não pertencem aos platôs de alguma decomposição de Morse, são chamados de transientes.

Transiência



Pontos transientes

Pontos que não pertencem aos platôs de alguma decomposição de Morse, são chamados de transientes.

Conjuntos Limites (ω-limite)

Definição (ω-limite)

Dado $x \in X$, $\omega(x)$ é o conjunto de todos os pontos y, tais que existe uma seqüência $t_n \to \infty$ tal que $\phi^{t_n}(x) \to y$.

Definição (ω^*-limite)

Da mesma forma, $\omega^*(x)$ é o conjunto de todos os pontos y, tais que existe uma seqüência $t_n \to -\infty$ tal que $\phi^{t_n}(x) \to y$.

Conjuntos Limites (ω-limite)

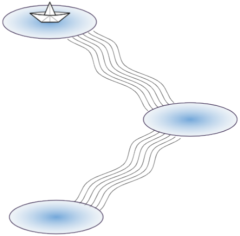
Definição (ω-limite)

Dado $x \in X$, $\omega(x)$ é o conjunto de todos os pontos y, tais que existe uma seqüência $t_n \to \infty$ tal que $\phi^{t_n}(x) \to y$.

Definição (ω^*-limite)

Da mesma forma, $\omega^*(x)$ é o conjunto de todos os pontos y, tais que existe uma seqüência $t_n \to -\infty$ tal que $\phi^{t_n}(x) \to y$.

Conjuntos Limites (ω-limite)



Observação

Uma das condições da decomposição de Morse, é que $\omega(x)$ e $\omega^*(x)$ estejam contidos em algum platô.

Observação

Outra condição, é que se ambos os limites estiverem em um mesmo platô, então, x também pertence a este platô.

Recorrência ($\mathcal{R}$)

Definição (Pontos recorrentes)

$$\mathcal{R} = \{x \in X \mid x \in \omega(x)\}$$

Transitividade por Cadeias (Ω-limite)

Definição (Ω-limite)

Dado um ponto $x \in X$, $\Omega(x)$ é o conjunto de todos os pontos em que se pode chegar através de uma sucessão finita de deslocamentos de tempos arbitrariamente grandes, e "saltos" de tamanho arbitrariamente pequenos.

Transitividade por Cadeias (Ω-limite)

Definição (Ω-limite)

Dado um ponto $x \in X$, $\Omega(x)$ é o conjunto de todos os pontos em que se pode chegar através de uma sucessão finita de deslocamentos de tempos arbitrariamente grandes, e "saltos" de tamanho arbitrariamente pequenos.

Transitividade por Cadeias (Ω-limite)

Definição (Ω-limite)

Dado um ponto $x \in X$, $\Omega(x)$ é o conjunto de todos os pontos em que se pode chegar através de uma sucessão finita de deslocamentos de tempos arbitrariamente grandes, e "saltos" de tamanho arbitrariamente pequenos.

Transitividade por Cadeias (Ω-limite)

Definição (Ω-limite)

Dado um ponto $x \in X$, $\Omega(x)$ é o conjunto de todos os pontos em que se pode chegar através de uma sucessão finita de deslocamentos de tempos arbitrariamente grandes, e "saltos" de tamanho arbitrariamente pequenos.

Transitividade por Cadeias (Ω-limite)

Definição (Ω-limite)

Dado um ponto $x \in X$, $\Omega(x)$ é o conjunto de todos os pontos em que se pode chegar através de uma sucessão finita de deslocamentos de tempos arbitrariamente grandes, e "saltos" de tamanho arbitrariamente pequenos.

Transitividade por Cadeias (Ω-limite)

Definição (Ω-limite)

Dado um ponto $x \in X$, $\Omega(x)$ é o conjunto de todos os pontos em que se pode chegar através de uma sucessão finita de deslocamentos de tempos arbitrariamente grandes, e "saltos" de tamanho arbitrariamente pequenos.

Recorrência por Cadeias ($\mathcal{R}^C$)

Definição (Pontos recorrentes por cadeias)

$$\mathcal{R}^C = \{x \in X \mid x \in \Omega(x)\}$$

Observação

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{R}^C$$

Recorrência por Cadeias ($\mathcal{R}^C$)

Definição (Pontos recorrentes por cadeias)

$$\mathcal{R}^C = \{x \in X \mid x \in \Omega(x)\}$$

Observação

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{R}^C$$

Recorrência por Cadeias e Decomposição de Morse

Proposição

Seja $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_n\}$ a família dos platôs de uma decomposição de Morse. Então,

$$\mathcal{R}^C \subset M_1 \cup \cdots \cup M_n.$$

Proposição

Se $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_n\}$ for a decomposição de Morse mais fina, então,

$$\mathcal{R}^C = M_1 \cup \cdots \cup M_n.$$

Recorrência por Cadeias e Decomposição de Morse

Proposição

Seja $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_n\}$ a família dos platôs de uma decomposição de Morse. Então,

$$\mathcal{R}^C \subset M_1 \cup \cdots \cup M_n.$$

Proposição

Se $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_n\}$ for a decomposição de Morse mais fina, então,

$$\mathcal{R}^C = M_1 \cup \cdots \cup M_n.$$

Descrição do Problema

Ação de $g^t \subset \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathbb{P}^{n-1}$

$$g^t : \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^{n-1} & \to & \mathbb{P}^{n-1} \\ [v] & \mapsto & \left[g^t v\right] \end{array} .$$

Caso contínuo ($\mathbb{T} = \mathbb{R}$)

Vamos considerar $g^t = \mathrm{e}^{tX} \in \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^n)$ para algum $X \in \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$.

Caso discreto ($\mathbb{T} = \mathbb{Z}$)

Para qualquer $g \in \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^n)$, $g^t = \underbrace{g \ldots g}_{t \text{ vezes}}$.

Descrição do Problema

Ação de $g^t \subset \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathbb{P}^{n-1}$

$$g^t : \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^{n-1} & \to & \mathbb{P}^{n-1} \\ [v] & \mapsto & [g^t v] \end{array}.$$

Caso contínuo ($\mathbb{T} = \mathbb{R}$)

Vamos considerar $g^t = \mathrm{e}^{tX} \in \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^n)$ para algum $X \in \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$.

Caso discreto ($\mathbb{T} = \mathbb{Z}$)

Para qualquer $g \in \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^n)$, $g^t = \underbrace{g \dots g}_{t \text{ vezes}}$.

Descrição do Problema

Ação de $g^t \subset \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathbb{P}^{n-1}$

$$g^t : \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^{n-1} & \to & \mathbb{P}^{n-1} \\ [v] & \mapsto & \left[g^t v\right] \end{array} .$$

Caso contínuo ($\mathbb{T} = \mathbb{R}$)

Vamos considerar $g^t = \mathrm{e}^{tX} \in \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^n)$ para algum $X \in \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$.

Caso discreto ($\mathbb{T} = \mathbb{Z}$)

Para qualquer $g \in \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^n)$, $g^t = \underbrace{g \dots g}_{t \text{ vezes}}$.

Decomposição de Jordan Aditiva

Proposição (Decomposição de Jordan Aditiva)

Seja $X \in \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$. Então, X pode ser decomposto em

$$X = E + H + N,$$

onde E, H e N comutam e são respectivamente elíptico, hiperbólico e nilpotente.

Decomposição de Jordan Aditiva

Proposição (Decomposição do Fluxo Contínuo)

O fluxo $g^t = \mathrm{e}^{tX}$ *pode ser escrito*

$$g^t = e^t h^t u^t.$$

Onde $e^t = \mathrm{e}^{tE}$, $h^t = \mathrm{e}^{tH}$ *e* $u^t = \mathrm{e}^{tN}$ *comutam e são respectivamente elíptico (multiplicativo), hiperbólico (multiplicativo) e unipotente.*

Decomposição de Jordan Aditiva (exemplo)

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0 + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Decomposição de Jordan Aditiva (exemplo)

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0 + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Decomposição de Jordan Multiplicativa

Definição (Decomposição de Jordan Multiplicativa)

Todo $g \in \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^n)$ pode ser decomposto em

$$g = ehu,$$

onde e, h e u comutam e são respectivamente elíptico (multiplicativo), hiperbólico (multiplicativo) e unipotente.

Decomposição de Jordan Multiplicativa

Proposição (Decomposição do Fluxo Discreto)

O fluxo g^t pode ser decomposto em

$$g^t = e^t h^t u^t.$$

Onde e^t, h^t e u^t comutam e são respectivamente elíptico (multiplicativo), hiperbólico (multiplicativo) e unipotente.

Decomposição de Jordan Multiplicativa

Proposição (Decomposição do Fluxo Discreto e Contínuo)

O fluxo g^t pode ser decomposto em

$$g^t = e^t h^t u^t.$$

Onde e^t, h^t e u^t comutam e são respectivamente elíptico (multiplicativo), hiperbólico (multiplicativo) e unipotente.

Fluxo Elíptico

Suponha que

- $g^t = e^t h^t u^t$.
- $a_1, \dots, a_n$ é uma base (em $\mathbb{C}^n$) de auto-vetores de e^t.
- $|\cdot|$ é a norma do máximo na base $a_1, \dots, a_n$.
  Nesta norma, e^t é uma isometria para todo t.

Conclusão

Todos os pontos de $\mathbb{P}^{n-1}$ são recorrentes por e^t.

Fluxo Elíptico

Suponha que

- $g^t = e^t h^t u^t$.
- $a_1, \ldots, a_n$ é uma base (em $\mathbb{C}^n$) de auto-vetores de e^t.
- $|\cdot|$ é a norma do máximo na base $a_1, \ldots, a_n$. Nesta norma, e^t é uma isometria para todo t.

Conclusão

Todos os pontos de $\mathbb{P}^{n-1}$ são recorrentes por e^t.

Fluxo Elíptico

Suponha que

- $g^t = e^t h^t u^t$.
- $a_1, \ldots, a_n$ é uma base (em $\mathbb{C}^n$) de auto-vetores de e^t.
- $|\cdot|$ é a norma do máximo na base $a_1, \ldots, a_n$.
  Nesta norma, e^t é uma isometria para todo t.

Conclusão

Todos os pontos de $\mathbb{P}^{n-1}$ são recorrentes por e^t.

Fluxo Elíptico

Suponha que

- $g^t = e^t h^t u^t$.
- $a_1, \ldots, a_n$ é uma base (em $\mathbb{C}^n$) de auto-vetores de e^t.
- $|\cdot|$ é a norma do máximo na base $a_1, \ldots, a_n$.
  Nesta norma, e^t é uma isometria para todo t.

Conclusão

Todos os pontos de $\mathbb{P}^{n-1}$ são recorrentes por e^t.

Fluxo Elíptico

Suponha que

- $g^t = e^t h^t u^t$.
- $a_1, \ldots, a_n$ é uma base (em $\mathbb{C}^n$) de auto-vetores de e^t.
- $|\cdot|$ é a norma do máximo na base $a_1, \ldots, a_n$.
  Nesta norma, e^t é uma isometria para todo t.

Conclusão

Todos os pontos de $\mathbb{P}^{n-1}$ são recorrentes por e^t.

Fluxo Elíptico

Conclusão

Todos os pontos de $\mathbb{P}^{n-1}$ são recorrentes por e^{t}.

Demonstração.

Para $v \in \mathbb{P}^{n-1}$, $e^{m}v$ é uma seqüência em $\mathbb{P}^{n-1}$ e possui subseqüência convergente a algum $w \in \mathbb{P}^{n-1}$. Assim, dado $k > 0$, existem l_k e m_k, tais que $m_k > k + l_k$ e

$$|e^{l_k}v - w| < \frac{1}{2k} \quad \text{e} \quad |e^{m_k}v - w| < \frac{1}{2k}.$$

Fluxo Elíptico

Conclusão

Todos os pontos de $\mathbb{P}^{n-1}$ são recorrentes por e^t.

Demonstração.

Para $v \in \mathbb{P}^{n-1}$, $e^m v$ é uma seqüência em $\mathbb{P}^{n-1}$ e possui subseqüência convergente a algum $w \in \mathbb{P}^{n-1}$. Assim, dado $k > 0$, existem l_k e m_k, tais que $m_k > k + l_k$ e

$$|e^{l_k} v - e^{m_k} v| < \frac{1}{k} \to 0.$$

Fluxo Elíptico

Conclusão

Todos os pontos de $\mathbb{P}^{n-1}$ são recorrentes por e^t.

Demonstração.

$$|e^{l_k} v - e^{m_k} v| < \frac{1}{k} \to 0.$$

Como e^t é isometria,

$$|v - e^{m_k - l_k} v| < \frac{1}{k} \to 0.$$

O resultado segue, pois $m_k - l_k > k \to \infty$.

Fluxo Elíptico

Conclusão

Todos os pontos de $\mathbb{P}^{n-1}$ são recorrentes por e^t.

Demonstração.

$$|e^{l_k} v - e^{m_k} v| < \frac{1}{k} \to 0.$$

Como e^t é isometria,

$$|v - e^{m_k - l_k} v| < \frac{1}{k} \to 0.$$

O resultado segue, pois $m_k - l_k > k \to \infty$.

Fluxo Unipotente

Suponha que

- $g^t = e^t h^t u^t$.

Conclusão

Todos os pontos de $\mathbb{P}^{n-1}$ são recorrentes por cadeias pela ação de u^t.

Fluxo Unipotente

Suponha que

- $g^t = e^t h^t u^t$.

Conclusão

Todos os pontos de $\mathbb{P}^{n-1}$ são recorrentes por cadeias pela ação de u^t.

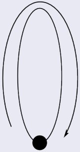
Fluxo Unipotente

Conclusão

Todos os pontos de $\mathbb{P}^{n-1}$ são recorrentes por cadeias pela ação de u^t.

Demonstração.

Dado $v \in \mathbb{R}^n$, vamos mostrar que $\omega([v]) = \omega^*([v])$.



Toda transformação unipotente u é da forma e^N. Assim,

$$u^t = e^{tN}.$$

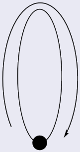
Fluxo Unipotente

Conclusão

Todos os pontos de $\mathbb{P}^{n-1}$ são recorrentes por cadeias pela ação de u^t.

Demonstração.

Dado $v \in \mathbb{R}^n$, vamos mostrar que $\omega([v]) = \omega^*([v])$.



Toda transformação unipotente u é da forma e^N. Assim,

$$u^t = \mathrm{e}^{tN}.$$

Fluxo Unipotente

Conclusão

Todos os pontos de $\mathbb{P}^{n-1}$ são recorrentes por cadeias pela ação de u^t.

Demonstração.

Temos $u^t = \mathrm{e}^{tN}$. Seja $m \geq 0$ tal que $N^m v \neq 0$ e $N^{m+1} v = 0$.
Para $t \to \pm\infty$,

$$u^t[v] = \left[v + \frac{t}{1!} N^1 v + \ldots + \frac{t^m}{m!} N^m v \right]$$

Fluxo Unipotente

Conclusão

Todos os pontos de $\mathbb{P}^{n-1}$ são recorrentes por cadeias pela ação de u^t.

Demonstração.

Temos $u^t = \mathrm{e}^{tN}$. Seja $m \geq 0$ tal que $N^m v \neq 0$ e $N^{m+1} v = 0$. Para $t \to \pm\infty$,

$$u^t[v] = \left[v + \frac{t}{1!}N^1 v + \ldots + \frac{t^m}{m!}N^m v\right]$$

Fluxo Unipotente

Conclusão

Todos os pontos de $\mathbb{P}^{n-1}$ são recorrentes por cadeias pela ação de u^t.

Demonstração.

Temos $u^t = e^{tN}$. Seja $m \geq 0$ tal que $N^m v \neq 0$ e $N^{m+1} v = 0$. Para $t \to \pm\infty$,

$$u^t [v] = \left[\frac{m!}{t^m} v + \frac{m!}{1!t^{m-1}} N^1 v + \ldots + N^m v \right] \to [N^m v] .$$

Fluxo Unipotente

Conclusão

Todos os pontos de $\mathbb{P}^{n-1}$ são recorrentes por cadeias pela ação de u^t.

Demonstração.

Temos $u^t = \mathrm{e}^{tN}$. Seja $m \geq 0$ tal que $N^m v \neq 0$ e $N^{m+1} v = 0$. Para $t \to \pm\infty$,

$$u^t [v] = \left[\frac{m!}{t^m} v + \frac{m!}{1!\, t^{m-1}} N^1 v + \ldots + N^m v \right] \to [N^m v] .$$

Fluxo Hiperbólico

Suponha que

- $g^t = e^t h^t u^t$.
- $\lambda_1 > \cdots > \lambda_d$ são os auto-valores (reais positivos) de h^t.
- $V_1, \ldots, V_d$ são os auto-espaços de h relativos aos auto-valores $\lambda_1 > \cdots > \lambda_d$.

Conclusão

$\mathcal{M} = \{\mathbb{P}V_1, \ldots, \mathbb{P}V_d\}$ é a decomposição de Morse minimal.

Fluxo Hiperbólico

Suponha que

- $g^t = e^t h^t u^t$.
- $\lambda_1 > \cdots > \lambda_d$ são os auto-valores (reais positivos) de h^t.
- $V_1, \ldots, V_d$ são os auto-espaços de h relativos aos auto-valores $\lambda_1 > \cdots > \lambda_d$.

Conclusão

$\mathcal{M} = \{\mathbb{P}V_1, \ldots, \mathbb{P}V_d\}$ é a decomposição de Morse minimal.

Fluxo Hiperbólico

Suponha que

- $g^t = e^t h^t u^t$.
- $\lambda_1 > \cdots > \lambda_d$ são os auto-valores (reais positivos) de h^t.
- $V_1, \ldots, V_d$ são os auto-espaços de h relativos aos auto-valores $\lambda_1 > \cdots > \lambda_d$.

Conclusão

$\mathcal{M} = \{\mathbb{P}V_1, \ldots, \mathbb{P}V_d\}$ é a decomposição de Morse minimal.

Fluxo Hiperbólico

Suponha que

- $g^t = e^t h^t u^t$.
- $\lambda_1 > \cdots > \lambda_d$ são os auto-valores (reais positivos) de h^t.
- $V_1, \ldots, V_d$ são os auto-espaços de h relativos aos auto-valores $\lambda_1 > \cdots > \lambda_d$.

Conclusão

$\mathcal{M} = \{\mathbb{P}V_1, \ldots, \mathbb{P}V_d\}$ é a decomposição de Morse minimal.

Fluxo Hiperbólico

Conclusão

$\mathcal{M} = \{\mathbb{P}V_1, \ldots, \mathbb{P}V_d\}$ é a decomposição de Morse minimal.

Demonstração.

Seja $v = v_i + \cdots + v_j$, com $v_k \in V_k$ e $v_i, v_j \neq 0$.

$$h^t[v] = \left[\lambda_i^t v_i + \cdots + \lambda_j^t v_j\right]$$

$$h^t[v] = \left[\lambda_i^t v_i + \cdots + \lambda_j^t v_j\right]$$

Fluxo Hiperbólico

Conclusão

$\mathcal{M} = \{\mathbb{P}V_1, \ldots, \mathbb{P}V_d\}$ é a decomposição de Morse minimal.

Demonstração.

Seja $v = v_i + \cdots + v_j$, com $v_k \in V_k$ e $v_i, v_j \neq 0$.

$$h^t[v] = \left[\lambda_i^t v_i + \cdots + \lambda_j^t v_j\right]$$

$$h^t[v] = \left[\lambda_i^t v_i + \cdots + \lambda_j^t v_j\right]$$

Fluxo Hiperbólico

Conclusão

$\mathcal{M} = \{\mathbb{P}V_1, \ldots, \mathbb{P}V_d\}$ é a decomposição de Morse minimal.

Demonstração.

Seja $v = v_i + \cdots + v_j$, com $v_k \in V_k$ e $v_i, v_j \neq 0$.

$$h^t[v] = \left[v_i + \cdots + \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^t v_j \right] \to [v_i] \; (t \to \infty)$$

$$h^t[v] = \left[\lambda_i^t v_i + \cdots + \lambda_j^t v_j \right]$$

Fluxo Hiperbólico

Conclusão

$\mathcal{M} = \{\mathbb{P}V_1, \ldots, \mathbb{P}V_d\}$ é a decomposição de Morse minimal.

Demonstração.

Seja $v = v_i + \cdots + v_j$, com $v_k \in V_k$ e $v_i, v_j \neq 0$.

$$h^t[v] = \left[v_i + \cdots + \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^t v_j\right] \to [v_i] \ (t \to \infty)$$

$$h^t[v] = \left[\lambda_i^t v_i + \cdots + \lambda_j^t v_j\right]$$

Fluxo Hiperbólico

Conclusão

$\mathcal{M} = \{\mathbb{P}V_1, \ldots, \mathbb{P}V_d\}$ é a decomposição de Morse minimal.

Demonstração.

Seja $v = v_i + \cdots + v_j$, com $v_k \in V_k$ e $v_i, v_j \neq 0$.

$$h^t[v] = \left[v_i + \cdots + \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i} \right)^t v_j \right] \to [v_i] \ (t \to \infty)$$

$$h^t[v] = \left[\lambda_i^t v_i + \cdots + \lambda_j^t v_j \right]$$

Fluxo Hiperbólico

Conclusão

$\mathcal{M} = \{\mathbb{P}V_1, \ldots, \mathbb{P}V_d\}$ é a decomposição de Morse minimal.

Demonstração.

Seja $v = v_i + \cdots + v_j$, com $v_k \in V_k$ e $v_i, v_j \neq 0$.

$$h^t[v] = \left[v_i + \cdots + \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^t v_j\right] \to [v_i] \ (t \to \infty)$$

$$h^t[v] = \left[\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^t v_i + \cdots + v_j\right] \to [v_j] \ (t \to -\infty)$$

Fluxo Hiperbólico

Conclusão

$\mathcal{M} = \{\mathbb{P}V_1, \ldots, \mathbb{P}V_d\}$ é a decomposição de Morse minimal.

Demonstração.

Seja $v = v_i + \cdots + v_j$, com $v_k \in V_k$ e $v_i, v_j \neq 0$.

$$h^t[v] = \left[v_i + \cdots + \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^t v_j\right] \to [v_i] \ (t \to \infty)$$

$$h^t[v] = \left[\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^t v_i + \cdots + v_j\right] \to [v_j] \ (t \to -\infty)$$

Fluxo Hiperbólico

Conclusão

$\mathcal{M} = \{\mathbb{P}V_1, \ldots, \mathbb{P}V_d\}$ é a decomposição de Morse minimal.

Demonstração.

Assim,

$$\mathcal{R}^C \subset \mathbb{P}V_1 \cup \cdots \cup \mathbb{P}V_d.$$

Como todos os pontos de $\mathbb{P}V_k$ são fixos, são também recorrentes por cadeias. Ou seja,

$$\mathcal{R}^C = \mathbb{P}V_1 \cup \cdots \cup \mathbb{P}V_d.$$

Fluxo Hiperbólico

Conclusão

$\mathcal{M} = \{\mathbb{P}V_1, \ldots, \mathbb{P}V_d\}$ é a decomposição de Morse minimal.

Demonstração.

Assim,

$$\mathcal{R}^C \subset \mathbb{P}V_1 \cup \cdots \cup \mathbb{P}V_d.$$

Como todos os pontos de $\mathbb{P}V_k$ são fixos, são também recorrentes por cadeias. Ou seja,

$$\mathcal{R}^C = \mathbb{P}V_1 \cup \cdots \cup \mathbb{P}V_d.$$

Transiência e Recorrência (caso geral)

Motivados pelos casos anteriores, determinamos a decomposição de Morse minimal de um fluxo linear arbitrário sobre o espaço projetivo.

Sejam,

- $g^t = e^t h^t u^t$.
- $\lambda_1 > \cdots > \lambda_d$ os auto-valores (reais positivos) de h^t.
- $V_1, \ldots, V_d$ os auto-espaços de h^t relativos aos auto-valores $\lambda_1 > \cdots > \lambda_d$.

Transiência e Recorrência (caso geral)

Motivados pelos casos anteriores, determinamos a decomposição de Morse minimal de um fluxo linear arbitrário sobre o espaço projetivo.
Sejam,

- $g^t = e^t h^t u^t$.
- $\lambda_1 > \cdots > \lambda_d$ os auto-valores (reais positivos) de h^t.
- $V_1, \ldots, V_d$ os auto-espaços de h^t relativos aos auto-valores $\lambda_1 > \cdots > \lambda_d$.

Transiência e Recorrência (caso geral)

Motivados pelos casos anteriores, determinamos a decomposição de Morse minimal de um fluxo linear arbitrário sobre o espaço projetivo.
Sejam,

- $g^t = e^t h^t u^t$.
- $\lambda_1 > \cdots > \lambda_d$ os auto-valores (reais positivos) de h^t.
- $V_1, \ldots, V_d$ os auto-espaços de h^t relativos aos auto-valores $\lambda_1 > \cdots > \lambda_d$.

Transiência e Recorrência (caso geral)

Motivados pelos casos anteriores, determinamos a decomposição de Morse minimal de um fluxo linear arbitrário sobre o espaço projetivo.
Sejam,

- $g^t = e^t h^t u^t$.
- $\lambda_1 > \cdots > \lambda_d$ os auto-valores (reais positivos) de h^t.
- $V_1, \ldots, V_d$ os auto-espaços de h^t relativos aos auto-valores $\lambda_1 > \cdots > \lambda_d$.

Caso Geral

Proposição (Decomposição de Morse)

$\mathcal{M} = \{\mathbb{P}V_1, \ldots, \mathbb{P}V_d\}$ *é uma decomposição de Morse de* g^t.

Caso Geral

Proposição (Decomposição de Morse)

$\mathcal{M} = \{\mathbb{P}V_1, \ldots, \mathbb{P}V_d\}$ *é uma decomposição de Morse de* g^t.

Dado que $\mathcal{M} = \{\mathbb{P}V_1, \ldots, \mathbb{P}V_d\}$ é uma decomposição de Morse de g^t, temos que

$$\mathcal{R}^C \subset \bigcup_{i=1}^{d} \mathbb{P}V_i = \text{fix}(h^t).$$

Caso Geral

Proposição (Decomposição de Morse)

$\mathcal{M} = \{\mathbb{P}V_1, \ldots, \mathbb{P}V_d\}$ *é uma decomposição de Morse de* g^t*.*

Dado que $\mathcal{M} = \{\mathbb{P}V_1, \ldots, \mathbb{P}V_d\}$ é uma decomposição de Morse de g^t, temos que

$$\mathcal{R}^C \subset \bigcup_{i=1}^{d} \mathbb{P}V_i = \text{fix}(h^t).$$

Proposição

$$\mathcal{R}^C = \text{fix}(h^t).$$

Caso Geral

Proposição (Decomposição de Morse)

$\mathcal{M} = \{\mathbb{P}V_1, \ldots, \mathbb{P}V_d\}$ *é uma decomposição de Morse de* g^t.

Proposição

$$\mathcal{R}^C = \text{fix}(h^t).$$

Sabemos que

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{R}^C(g^t) = \text{fix}(h^t).$$

Proposição

$$\mathcal{R} = \text{fix}(h^t) \cap \text{fix}(u^t).$$

Caso Geral

Proposição (Decomposição de Morse)

$\mathcal{M} = \{\mathbb{P}V_1, \ldots, \mathbb{P}V_d\}$ *é uma decomposição de Morse de* g^t.

Proposição

$$\mathcal{R}^C = \text{fix}(h^t).$$

Proposição

$$\mathcal{R} = \text{fix}(h^t) \cap \text{fix}(u^t).$$

Exemplo em $\mathrm{Sl}(\mathbb{R}^3)$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

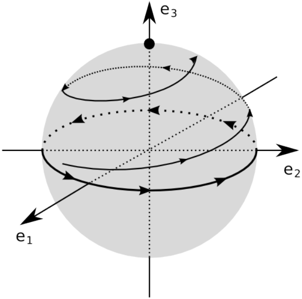
$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo em $\mathrm{Sl}(\mathbb{R}^3)$

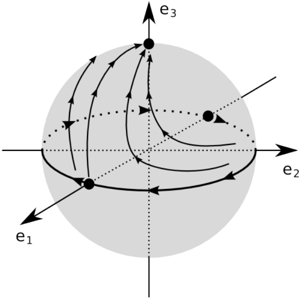
$$X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo em $\mathrm{Sl}(\mathbb{R}^3)$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



Grasmaniana e Flag

Definição (Grasmaniana)

Considere $\mathbb{R}^n$ e $d \leq n$. O conjunto de todos os sub-espaços de $\mathbb{R}^n$ de dimensão d é denotado por $\mathrm{Gr}_d(\mathbb{R}^n)$. Este é um espaço topológico, e é chamado de grasmaniana.

Observação

O grupo $\mathrm{Gl}(\mathbb{R}^n)$ age naturalmente nas grasmanianas, pois leva espaços de dimensão d em espaços de dimensão d.

Grasmaniana e Flag

Definição (Grasmaniana)

Considere $\mathbb{R}^n$ *e* $d \leq n$*. O conjunto de todos os sub-espaços de* $\mathbb{R}^n$ *de dimensão* d *é denotado por* $\mathrm{Gr}_d(\mathbb{R}^n)$*. Este é um espaço topológico, e é chamado de grasmaniana.*

Observação

O grupo $\mathrm{Gl}(\mathbb{R}^n)$ age naturalmente nas grasmanianas, pois leva espaços de dimensão d em espaços de dimensão d.

Grasmaniana e Flag

Definição (Flag)

Seja $G \subset \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^n)$ um sub-grupo de Lie semi-simples, e $\mathbb{F} \subset \mathrm{Gr}_d(\mathbb{R}^n)$ um sub-conjunto compacto onde G age transitivamente. Neste caso, dizemos que $\mathbb{F}$ é um flag.

Exemplo

Exemplo (A grasmaniana é um flag)

O conjunto $\mathrm{Gr}_d(\mathbb{R}^n)$ é uma grasmaniana, onde $G = \mathrm{Sl}(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo

Exemplo (Flags clássicos)

Seja $\mathbb{F}$ o conjunto de todas as seqüências de subespaços

$$V_1 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{R}^n, \text{ onde } \dim(V_k) = k.$$

Então, $\mathrm{Sl}(\mathbb{R}^n)$ age em $\mathbb{F}$. Cada $(V_1, \ldots, V_n) \in \mathbb{F}$ pode ser identificado com o espaço de todas as transformações que em uma base fixada $v_1, \ldots, v_n$, com $v_k \in V_k$, são da forma

$$\begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & * \end{pmatrix} \subset \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n).$$

Ou seja, $\mathbb{F} \subset \mathrm{Gr}_{(n^2+n)/2}(\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n))$.

Exemplo

Exemplo (Flags clássicos)

Seja $\mathbb{F}$ o conjunto de todas as seqüências de subespaços

$$V_1 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{R}^n, \text{ onde } \dim(V_k) = k.$$

Então, $\mathrm{Sl}(\mathbb{R}^n)$ age em $\mathbb{F}$. Cada $(V_1, \ldots, V_n) \in \mathbb{F}$ pode ser identificado com o espaço de todas as transformações que em uma base fixada $v_1, \ldots, v_n$, com $v_k \in V_k$, são da forma

$$\begin{pmatrix} * & \ldots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & * \end{pmatrix} \subset \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n).$$

Ou seja, $\mathbb{F} \subset \mathrm{Gr}_{(n^2+n)/2}(\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n))$.

Exemplo

Exemplo (Flags clássicos)

Seja $\mathbb{F}$ o conjunto de todas as seqüências de subespaços

$$V_1 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{R}^n, \text{ onde } \dim(V_k) = k.$$

Então, $\mathrm{Sl}(\mathbb{R}^n)$ age em $\mathbb{F}$. Cada $(V_1, \ldots, V_n) \in \mathbb{F}$ pode ser identificado com o espaço de todas as transformações que em uma base fixada $v_1, \ldots, v_n$, com $v_k \in V_k$, são da forma

$$\begin{pmatrix} * & \ldots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & * \end{pmatrix} \subset \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n).$$

Ou seja, $\mathbb{F} \subset \mathrm{Gr}_{(n^2+n)/2}(\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n))$.

Mergulho de Plücker

Definição (Mergulho de Plücker)

O seguinte mergulho é chamado de mergulho de Plücker.

$$\begin{array}{rccc} i: & \mathrm{Gr}_d(\mathbb{R}^n) & \to & \mathbb{P}(\bigwedge_d \mathbb{R}^n) \\ & \langle v_1, \ldots, v_d \rangle & \mapsto & [v_1 \wedge \cdots \wedge v_d] \end{array}$$

Definição (Representação de $\mathrm{Gl}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathrm{Gl}(\bigwedge_d \mathbb{R}^n)$)

$$\begin{array}{rccccc} \rho: & \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^n) & \to & \mathrm{Gl}(\bigwedge_d \mathbb{R}^n) & & \\ & g & \mapsto & \rho(g): \bigwedge_d \mathbb{R}^n & \to & \bigwedge_d \mathbb{R}^n \\ & & & v_1 \wedge \cdots \wedge v_d & \mapsto & gv_1 \wedge \cdots \wedge gv_d \end{array}$$

Mergulho de Plücker

Definição (Mergulho de Plücker)

O seguinte mergulho é chamado de mergulho de Plücker.

$$\begin{array}{rccc} i: & \mathrm{Gr}_d(\mathbb{R}^n) & \to & \mathbb{P}(\bigwedge_d \mathbb{R}^n) \\ & \langle v_1, \ldots, v_d \rangle & \mapsto & [v_1 \wedge \cdots \wedge v_d] \end{array}$$

Definição (Representação de $\mathrm{Gl}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathrm{Gl}(\bigwedge_d \mathbb{R}^n)$)

$$\begin{array}{rccccc} \rho: & \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^n) & \to & \mathrm{Gl}(\bigwedge_d \mathbb{R}^n) & & \\ & g & \mapsto & \rho(g): \bigwedge_d \mathbb{R}^n & \to & \bigwedge_d \mathbb{R}^n \\ & & & v_1 \wedge \cdots \wedge v_d & \mapsto & gv_1 \wedge \cdots \wedge gv_d \end{array}$$

Mergulho de Plücker (equivariância)

Observação

O mergulho de Plücker é tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gr}_d(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{g^t} & \mathrm{Gr}_d(\mathbb{R}^n) \\ i \downarrow & & \downarrow i \\ \mathbb{P}(\bigwedge_d \mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\rho(g)^t} & \mathbb{P}(\bigwedge_d \mathbb{R}^n) \end{array}$$

Observação

Ou seja, podemos identificar o fluxo g^t em $\mathrm{Gr}_d(\mathbb{R}^n)$ com a restrição de $\rho(g)^t$ a $i(\mathrm{Gr}_d(\mathbb{R}^n))$.

Mergulho de Plücker (equivariância)

Observação

O mergulho de Plücker é tal que o diagrama abaixo comuta:

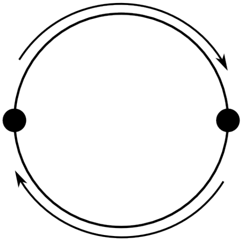
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gr}_d(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{g^t} & \mathrm{Gr}_d(\mathbb{R}^n) \\ i\downarrow & & \downarrow i \\ \mathbb{P}(\bigwedge_d \mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\rho(g)^t} & \mathbb{P}(\bigwedge_d \mathbb{R}^n) \end{array}$$

Observação

Ou seja, podemos identificar o fluxo g^t em $\mathrm{Gr}_d(\mathbb{R}^n)$ com a restrição de $\rho(g)^t$ a $i(\mathrm{Gr}_d(\mathbb{R}^n))$.

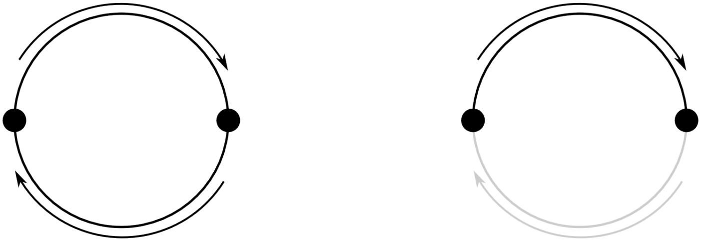
Problemas com Fluxos Mergulhados

Propriedades como recorrência por cadeias não são herdadas quando consideramos a restrição de um fluxo a um conjunto invariante.



Problemas com Fluxos Mergulhados

Propriedades como recorrência por cadeias não são herdadas quando consideramos a restrição de um fluxo a um conjunto invariante.



Problemas com "sub-grupos"

Observação

Quando um sub-grupo $G \subset \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^n)$ age em um subconjunto $\mathbb{F} \subset \mathbb{P}^{n-1}$, não podemos garantir que dado $g^t = e^t h^t u^t \in G$, as componentes de Jordan de g^t também pertencem a G.

Observação

Este fato é verdade quando $G \subset \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^n)$ é um subgrupo de Lie conexo semi-simples.

Problemas com “sub-grupos”

Observação

Quando um sub-grupo $G \subset \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^n)$ age em um subconjunto $\mathbb{F} \subset \mathbb{P}^{n-1}$, não podemos garantir que dado $g^t = e^t h^t u^t \in G$, as componentes de Jordan de g^t também pertencem a G.

Observação

Este fato é verdade quando $G \subset \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^n)$ é um subgrupo de Lie conexo semi-simples.

Componentes de Jordan de um Elemento do Grupo

Observação

Seja $g^t = e^t h^t u^t \in G$. Sabemos que $e^t, h^t, u^t \in G$.

Proposição

A decomposição de Jordan de $\rho(g)^t$ é dada por $\rho(g)^t = \rho(e)^t \rho(h)^t \rho(u)^t$.

Componentes de Jordan de um Elemento do Grupo

Observação

Seja $g^t = e^t h^t u^t \in G$. Sabemos que $e^t, h^t, u^t \in G$.

Proposição

A decomposição de Jordan de $\rho(g)^t$ é dada por
$\rho(g)^t = \rho(e)^t \rho(h)^t \rho(u)^t$.

Recorrência

Observação

Um ponto em $i(\mathbb{F})$ é recorrente quando for recorrente em $\mathbb{P}(\bigwedge_d \mathbb{R}^n)$.

Proposição

$$\mathcal{R}_{i(\mathbb{F})}(\rho(g)^t) = \mathrm{fix}_{i(\mathbb{F})}(\rho(h)^t) \cap \mathrm{fix}_{i(\mathbb{F})}(\rho(u)^t).$$

Proposição

$$\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(g^t) = \mathrm{fix}_{\mathbb{F}}(h^t) \cap \mathrm{fix}_{\mathbb{F}}(u^t).$$

Recorrência

Observação

Um ponto em $i(\mathbb{F})$ é recorrente quando for recorrente em $\mathbb{P}(\bigwedge_d \mathbb{R}^n)$.

Proposição

$$\mathcal{R}_{i(\mathbb{F})}(\rho(g)^t) = \mathrm{fix}_{i(\mathbb{F})}(\rho(h)^t) \cap \mathrm{fix}_{i(\mathbb{F})}(\rho(u)^t).$$

Proposição

$$\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(g^t) = \mathrm{fix}_{\mathbb{F}}(h^t) \cap \mathrm{fix}_{\mathbb{F}}(u^t).$$

Recorrência

Observação

Um ponto em $i(\mathbb{F})$ é recorrente quando for recorrente em $\mathbb{P}(\bigwedge_d \mathbb{R}^n)$.

Proposição

$$\mathcal{R}_{i(\mathbb{F})}(\rho(g)^t) = \text{fix}_{i(\mathbb{F})}(\rho(h)^t) \cap \text{fix}_{i(\mathbb{F})}(\rho(u)^t).$$

Proposição

$$\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(g^t) = \text{fix}_{\mathbb{F}}(h^t) \cap \text{fix}_{\mathbb{F}}(u^t).$$

Recorrência por Cadeias

Observação

Em geral, sabemos que

$$\mathcal{R}^{C}_{i(\mathbb{F})}(\rho(g)^t) \subset \mathcal{R}^{C}(\rho(g)^t) \cap i(\mathbb{F}) = \text{fix}(\rho(h)^t) \cap i(\mathbb{F}) = \text{fix}_{i(\mathbb{F})}(\rho(h)^t).$$

Proposição

$$\mathcal{R}^{C}_{i(\mathbb{F})}(\rho(g)^t) = \text{fix}_{i(\mathbb{F})}(\rho(h)^t).$$

Proposição

$$\mathcal{R}^{C}_{\mathbb{F}}(g^t) = \text{fix}_{\mathbb{F}}(h^t).$$

Recorrência por Cadeias

Observação

Em geral, sabemos que

$$\mathcal{R}^{C}_{i(\mathbb{F})}(\rho(g)^{t}) \subset \mathcal{R}^{C}(\rho(g)^{t}) \cap i(\mathbb{F}) = \mathrm{fix}(\rho(h)^{t}) \cap i(\mathbb{F}) = \mathrm{fix}_{i(\mathbb{F})}(\rho(h)^{t}).$$

Proposição

$$\mathcal{R}^{C}_{i(\mathbb{F})}(\rho(g)^{t}) = \mathrm{fix}_{i(\mathbb{F})}(\rho(h)^{t}).$$

Proposição

$$\mathcal{R}^{C}_{\mathbb{F}}(g^{t}) = \mathrm{fix}_{\mathbb{F}}(h^{t}).$$

Recorrência por Cadeias

Observação

Em geral, sabemos que

$$\mathcal{R}^{C}_{i(\mathbb{F})}(\rho(g)^{t}) \subset \mathcal{R}^{C}(\rho(g)^{t}) \cap i(\mathbb{F}) = \mathrm{fix}(\rho(h)^{t}) \cap i(\mathbb{F}) = \mathrm{fix}_{i(\mathbb{F})}(\rho(h)^{t}).$$

Proposição

$$\mathcal{R}^{C}_{i(\mathbb{F})}(\rho(g)^{t}) = \mathrm{fix}_{i(\mathbb{F})}(\rho(h)^{t}).$$

Proposição

$$\mathcal{R}^{C}_{\mathbb{F}}(g^{t}) = \mathrm{fix}_{\mathbb{F}}(h^{t}).$$

FIM

Contato

André Caldas <andre.em.caldas@gmail.com>